INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXII. BAND VIERTES HEFT 1954

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 10,40

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Rittnertstr. 12
Professor K. v. Sanden, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. F. Schleicher, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd. 242 Marylebone Road, London, N.W. 1.

Inhalt:

Seite

Tolle, O., Über Anwendungen von „Plänen relativer Normalbeschleunigungen" in der Getriebedynamik. Mit 16 Textabbildungen . . . 227

Link, H., Über den geraden Knickstab mit begrenzter Durchbiegung. Mit 23 Textabbildungen 237

Kauderer, H., Zur Analyse der Dämpfung freier Schwingungen. Mit 1 Textabbildung 251

Neuber, H., Gesetzmäßigkeiten von Torsionsschwingungszahlen und Aufstellung einfacher Grenzwertformeln. Mit 12 Textabbildungen . . . 258

Szablewski, W., Turbulente Strömungen in divergenten Kanälen. Mit 10 Textabbildungen 268

Haase, D., Strömung in einem 90°-Knie. Mit 9 Textabbildungen . . . 282

Schmutz, O., Berichtigung zum Aufsatz „Koeffizientenbedingungen zur Kontrolle des Dämpfungsgrades bei Ausgleichsvorgängen (verallgemeinerte Hurwitzbedingungen)". 293

Pöschl, Th., Berichtigung zu den Aufsätzen „Über Hauptschwingungen mit endlichen Schwingweiten" 294

INGENIEUR-ARCHIV

XXII. BAND VIERTES HEFT 1954

Über Anwendungen von „Plänen relativer Normalbeschleunigungen" in der Getriebedynamik.

(**Trägheitspol** einer ebenbewegten Scheibe und **Krümmungsmittelpunkt** von **Koppelkurven**.)

Von **O. Tolle.**

1. Einleitung. Infolge der vielseitigen Anwendung in der Getriebedynamik ist es wünschenswert, zur Ermittlung des Trägheitspoles einer eben bewegten Scheibe möglichst einfache Konstruktionen zur Verfügung zu haben.

Es ist Zweck dieser Arbeit, für jeden in Frage kommenden Fall eine graphische Lösung anzugeben, und zwar liegt in den folgenden Konstruktionen der Gedanke zu Grunde, für zwei Beschleunigungszustände die Wirkungslinien der dadurch bedingten Trägheitskräfte der Scheibe zu finden, deren Schnittpunkt dann der gesuchte Trägheitspol ist. Im Wesentlichen wird dabei von den „Plänen relativer Normalbeschleunigungen" Gebrauch gemacht, wie sie bereits von *M. Tolle*[1] in seiner Arbeit „Zur Dynamik der eben bewegten Scheibe" entwickelt wurden, um dort für die Lösung der dynamischen Grundaufgabe benutzt zu werden, die darin besteht, Beschleunigungen und Stützkräfte bei gegebenen eingeprägten Kräften zu bestimmen. Eine weitere Anwendung der „Pläne relativer Normalbeschleunigungen" machte später (im Jahre 1938) *N. Rosenauer*[2] bei der Bestimmung von Beschleunigungen kinematischer Ketten. *Rosenauer* gibt in seiner Arbeit den Hinweis, daß solche Pläne bereits 1909 bei *N. Joukovsky* zu finden seien, daß „aber diese Idee im Schrifttum nicht genügend ausgenützt wurde". Demgegenüber sei festgestellt, daß bereits im Jahre 1932 von *M. Tolle* nicht nur von den „Plänen relativer Normalbeschleunigungen" Gebrauch gemacht wird, sondern auch in der angegebenen Quelle hierfür einfache Ableitungen und Beweise mitgeteilt werden.

Die bekanntesten Verfahren zur Ermittlung des Trägheitspoles sind die von *R. Beyer*, *R. Kraus* und *G. Gerber*.

Bei *Beyer*[3] erfolgt die zeichnerische Bestimmung mit Hilfe des Wendepoles und des Geschwindigkeitspoles.

Kraus[4] findet den Trägheitspol aus den Geschwindigkeiten nach Annahme zweier Beschleunigungszustände, indem er die Wirkungslinien der zugehörigen Trägheitskräfte nach den im Ing.-Arch. 1930 von *O. Tolle*[5] mitgeteilten Konstruktionen bestimmt. Es wird dabei für den ersten gewählten Beschleunigungszustand die Tangentialbeschleunigung eines Punktes mit fester Drehachse null, im zweiten Fall eine beliebige Beschleunigung des Schwerpunktes der Scheibe angenommen. Die von *Kraus* vorgeschlagene Lösung der Aufgabe vereinfacht sich, wenn die vom Verfasser[6] im Ing.-Archiv 1951 angegebene neue Konstruktion für die Wirkungslinie des resultierenden Massenwiderstandes angewendet wird.

Das Verfahren von *Gerber*[7] benutzt einen Geschwindigkeitsplan sowie einen beliebigen, mit der Bewegung der Scheibe verträglichen Beschleunigungsplan nach *Mehmke*, bei welchen die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen von einem Punkt aus aufgetragen werden.

Zum Schluß dieser Arbeit wird, ebenfalls unter Benutzung eines „Planes relativer Normalbeschleunigungen", noch eine Konstruktion gezeigt, wie zeichnerisch der Krümmungsmittelpunkt einer Koppelkurve bestimmt werden kann.

---

[1] *M. Tolle*, ZVDI 76 (1932), S. 799.
[2] *N. Rosenauer*, Maschinenbau RM-Afg 6 (1938), S. 543.
[3] *R. Beyer*, Maschinenbau RM-Afg 3 (1935), S. 642.
[4] *R. Kraus*, Maschinenbau RM-Afg 4 (1936), S. 337.
[5] *O. Tolle*, Ing.-Arch. 1 (1930), S. 377; ZVDI 74 (1930), S. 1453.
[6] *O. Tolle*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 355.
[7] *G. Gerber*, Maschinenbau RM-Afg 8 (1940), S. 533.

2. Kurze Zusammenfassung der wichtigsten Beziehungen für die „Pläne relativer Normalbeschleunigungen". In der vorgenannten Quelle trennt *M. Tolle* die Massenkräfte, welche von der Winkelgeschwindigkeit ω herrühren und durch den Geschwindigkeitszustand der Scheibe bedingt sind, von denen, welche infolge der Winkelbeschleunigung ε auftreten.

Ist nach Abb. 1 die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$, so geht bekanntlich die auf dem Polstrahl $\mathfrak{P}S$ senkrecht stehende Wirkungslinie g_1 der resultierenden Trägheitskraft $\bar{P}_{\varepsilon(\omega=0)} = -m\bar{b}_{S\varepsilon}$ durch den auf den Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ bezogenen Trägheitsmittelpunkt $T_{\mathfrak{P}}$; dieser liegt auf dem Polstrahl $\mathfrak{P}S$ im Abstand $t_{\mathfrak{P}} = i_S^2/\varrho_S$ von S aus. Hierin bedeutet $i_S = \sqrt{J_S/m}$ den Trägheitshalbmesser der Scheibe, J_S das Trägheitsmoment dieser, bezogen auf die in S senkrecht stehende Achse, $m = G/g$ die Scheibenmasse und ϱ_S den Polabstand des Schwerpunktes.

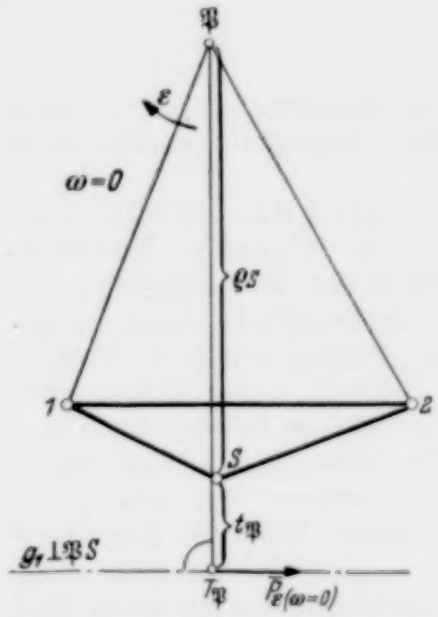

Abb. 1. Bestimmung der Wirkungslinie des resultierenden Massenwiderstandes für Winkelbeschleunigung ε und Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$.

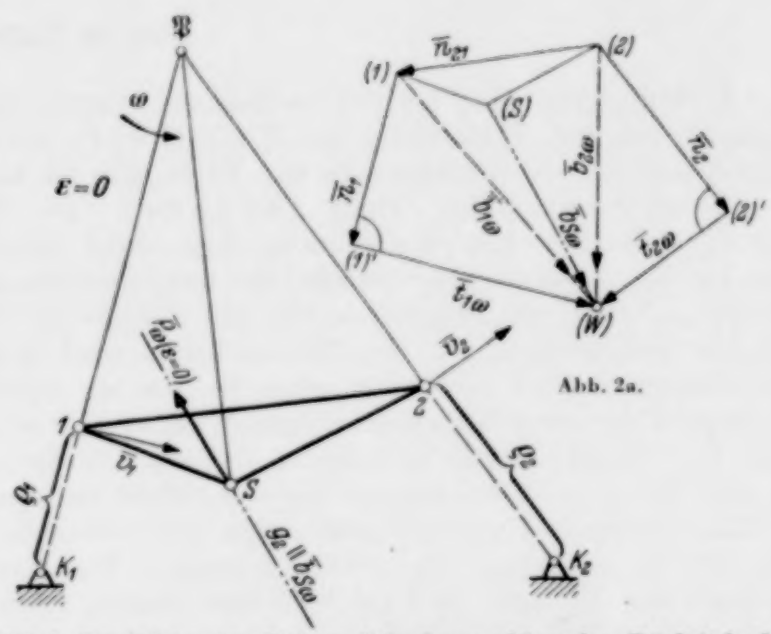

Abb. 2a.

Abb. 2. Ermittlung der Wirkungslinie der resultierenden Trägheitskraft infolge der Winkelgeschwindigkeit ω bei Winkelbeschleunigung $\varepsilon = 0$.

Abb. 2a. Beschleunigungsplan zu Abb. 2.

Für $\varepsilon = 0$ (Abb. 2) geht die von der Winkelgeschwindigkeit ω abhängige Trägheitskraft $\bar{P}_{\omega(\varepsilon=0)} = -m\,\bar{b}_{S\omega}$ einerseits durch den Schwerpunkt S, andererseits durch den Wendepol W der Scheibe. Die Wirkungslinie von $\bar{P}_{\omega(\varepsilon=0)}$ liegt in der Geraden g_2, welche sich auch ohne Kenntnis des Wendepoles mit Hilfe eines „Planes relativer Normalbeschleunigungen" folgendermaßen bestimmen läßt:

Man geht (Abb. 2a) von einem dem Dreieck *1 2 S* ähnlichen Dreieck (*1*) (*2*) (*S*) aus, welches dem ersten parallel gelegen ist und bei welchem die Seite (*2*) (*1*) gleich der relativen Normalbeschleunigung $\bar{n}_{21}$ des Punktes *2* gegen *1* gemacht wird. Dann trägt man in den Anfangs- und Endpunkten (*2*) und (*1*) der relativen Normalbeschleunigung $n_{21} = v_{21}^2/2\,1$, wobei $\bar{v}_{21} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$ die Relativgeschwindigkeit des Punktes *2* gegen *1* ist, die Normalbeschleunigungen $n_2 = v_2^2/\varrho_2$ und $n_1 = v_1^2/\varrho_1$ auf; die Senkrechten auf $\bar{n}_2$ und $\bar{n}_1$ in deren Endpunkten $(2)'$ und $(1)'$ schneiden sich im Punkt (W), in welchem die von ω herrührenden Beschleunigungen $\bar{b}_{2\omega}$, $\bar{b}_{1\omega}$ und $\bar{b}_{S\omega}$ endigen. Die Parallele zu $\bar{b}_{S\omega}$ durch S in Abb. 2 ist die Wirkungslinie g_2 von $\bar{P}_{\omega(\varepsilon=0)}$.

Bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Winkelgeschwindigkeit ω und der Winkelbeschleunigung ε (vgl. Abb. 3) ist die resultierende Trägheitskraft $\bar{P} = -m\,\bar{b}_S$, deren Wirkungslinie nach einem der bekannten Verfahren[1] bestimmt werden kann, wenn neben der Beschleunigung eines beliebigen Punktes noch die des Schwerpunktes S bekannt ist.

Nimmt man an, daß die von ε herrührende Tangentialbeschleunigung $\bar{t}_{1\varepsilon}$ bekannt ist, dann findet man nach Abb. 3a wiederum in einem „Plan relativer Normalbeschleunigungen" im Punkt $[1]'$ den Endpunkt der Gesamtbeschleunigung des Punktes *1* entsprechend der

[1] *H. Alt*, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 58. — *K. Federhofer*, ZVDI 74 (1930), S. 234. — *O. Tolle*, Ing.-Arch. 1 (1930), S. 377; ZVDI 74 (1930), S. 1453; Ing.-Arch. 19 (1951), S. 355.

Vektorgleichung $\bar{b}_1 = \bar{n}_1 + \bar{t}_{1\omega} + \bar{t}_{1\varepsilon}$. Hieraus ergibt sich für jeden weiteren Punkt der Scheibe, z. B. für Punkt *2*, der Endpunkt $[2]'$ seiner Beschleunigung $\bar{b}_2$ auf der Senkrechten zu *1 2* mit (*2*) als Anfangspunkt. Der Endpunkt $[S]'$ der Schwerpunktsbeschleunigung $\bar{b}_S$ ist dann der Eckpunkt des ähnlichen, um 90° gedrehten Dreiecks *1 2 3*; ihr Anfangspunkt ist (*S*). Man findet $[S]'$ als Schnitt der Senkrechten auf *1 S* durch $[1]'$ mit der Senkrechten auf *2 S* durch $[2]'$.

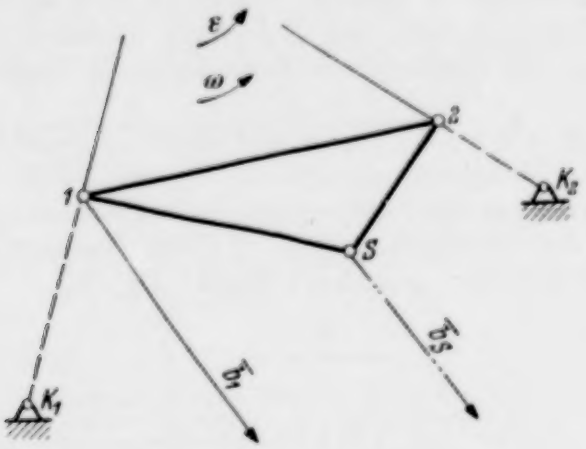

Abb. 3. Beschleunigungszustand für gleichzeitig vorhandene Winkelgeschwindigkeit ω und Winkelbeschleunigung ε.

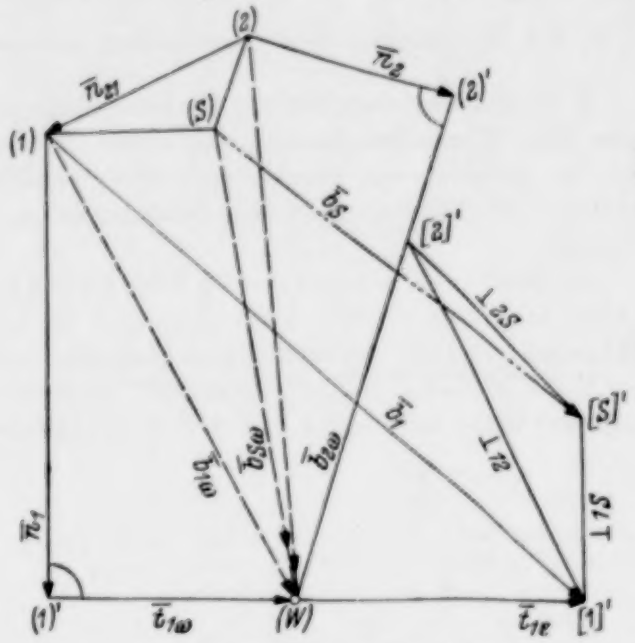

Abb. 3a. Beschleunigungsplan zu Abb. 3.

Nachdem, wie beschrieben, für Punkt 1 und für den Schwerpunkt *S* die Beschleunigungen bestimmt worden sind, findet man nach Abb. 4 hieraus in der Geraden g_3 die Wirkungslinie der resultierenden Trägheitskraft $\bar{P}_e = -m\,\bar{b}_S$ nach der Konstruktion des Verfassers[1], indem man im Lageplan durch den Endpunkt $[1]$ von $\bar{b}_1$ die Parallele zu *1 S* zieht und diese mit der Verbindungslinie des Endpunktes $[S]$ von $\bar{b}_S$ mit dem auf Punkt *1* bezogenen Trägheitsmittelpunktes T_1 in A' zum Schnitt bringt. Die Parallele zu $\bar{b}_S$ durch A' ist die gesuchte Wirkungslinie von $\bar{P}_e$.

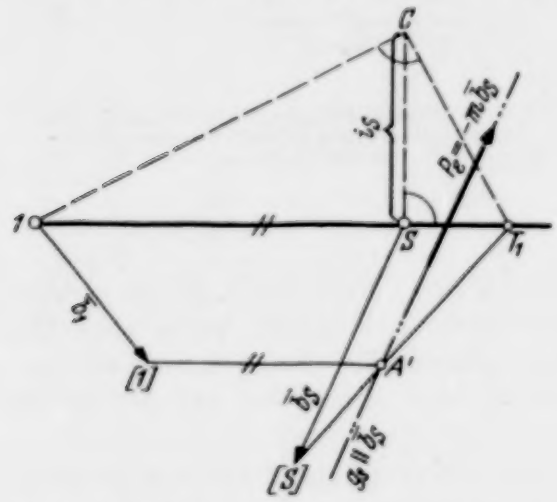

Abb. 4. Zeichnerische Bestimmung der Wirkungslinie der resultierenden Trägheitskraft $\bar{P} = -m\bar{b}_S$, wenn zuvor bei bekannter Beschleunigung b_1 eines Punktes 1 mit Hilfe eines „Planes relativer Normalbeschleunigungen" nach Abb. 3a die Schwerpunktsbeschleunigung $\bar{b}_S$ gefunden worden ist.

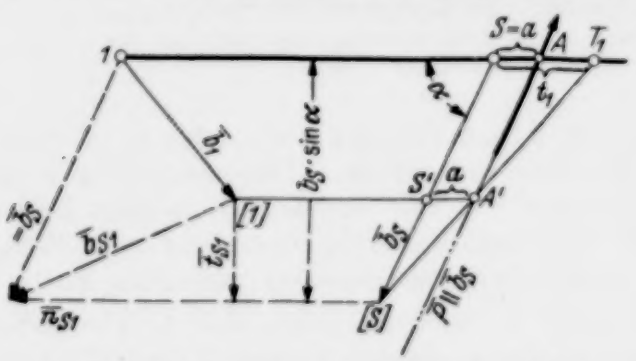

Abb. 4a. Nachweis der Konstruktion nach Abb. 4.

Während die beschriebene Konstruktion in der angegebenen Quelle aus einem „Plan relativer Normalbeschleunigungen" hergeleitet ist, sei an dieser Stelle ein anderer einfacher Beweis angegeben (Abb. 4a).

In der in Fußnote 1 von S. 227 bezeichneten Arbeit wurde gezeigt, daß die resultierende Massenkraft $\bar{P}$ durch einen auf der Verbindungslinie *1 S* liegenden Punkt *A* hindurchgeht, dessen Entfernung von *S* aus gemessen

$$S\,A = a = \frac{t_1\, t_{S1}}{b_S \sin\alpha}$$

[1] *O. Tolle*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 355.

beträgt; hierin bedeutet $t_1 = i_S^2/1S$ die Entfernung des auf *1* bezogenen Trägheitsmittelpunktes T_1 und $\bar{t}_{S1}$ die relative Tangentialbeschleunigung des Punktes S gegen *1*.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $S'A'[S]$ und $S\,T_1[S]$ folgt

$$\frac{a}{t_1} = \frac{t_{S1}}{b_S \sin\alpha},$$

d. h. die Richtigkeit der graphischen Lösung.

3. Konstruktionen für die Wirkungslinie g_1 der resultierenden Massenkraft $\bar{P}_{\varepsilon(\omega=0)}$, herrührend von der Winkelbeschleunigung ε bei Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$. Wohl in den meisten Fällen werden von vornherein die Geschwindigkeiten $\bar{v}$ bzw. die gedrehten Geschwindigkeiten $\overline{v}$ für alle Punkte der Scheibe bekannt sein. Es ergeben sich dann folgende Möglichkeiten:

a) Der Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ liegt zugänglich auf dem Zeichenblatt (Abb. 5). Man findet dann den auf $\mathfrak{P}$ bezogenen Trägheitsmittelpunkt $T_\mathfrak{P}$ mit Hilfe des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck, indem man auf der Senkrechten zum Polstrahl $\mathfrak{P}S$ in S die Strecke $SC = i_S$ aufträgt und in C auf der Verbindungslinie $\mathfrak{P}C$ die Normale errichtet; diese schneidet auf der Verlängerung von $\mathfrak{P}S$ den gesuchten Punkt $T_\mathfrak{P}$ ab.

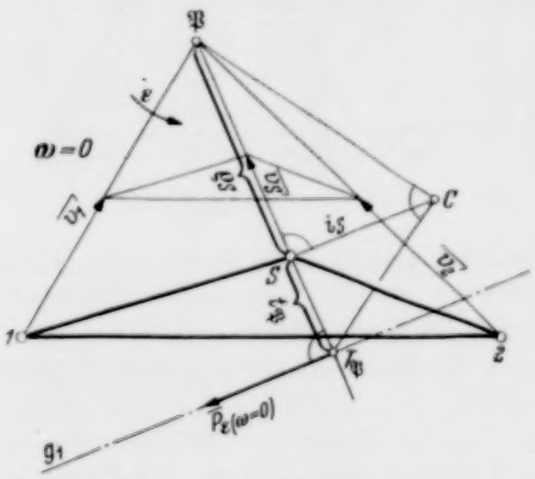

Abb. 5. Konstruktion des auf den Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ bezogenen Trägheitsmittelpunktes $T_\mathfrak{P}$ mit Hilfe gedrehter Geschwindigkeiten bei zugänglichem Pol; die Wirkungslinie von $\overline{P}_{\varepsilon(\omega=0)}$ geht durch $T_\mathfrak{P}$ und steht auf dem Polstrahl $\mathfrak{P}S$ senkrecht.

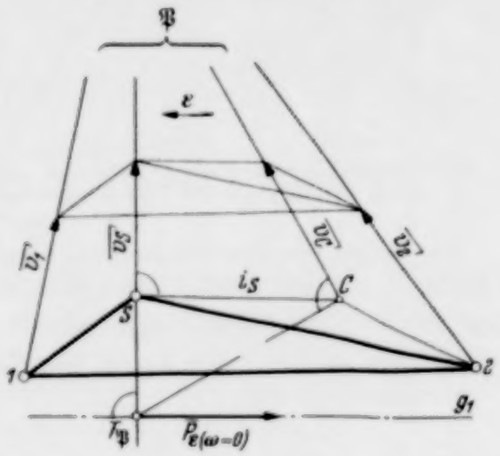

Abb. 6. Dieselbe Aufgabe wie in Abb. 5, jedoch liegt der Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ außerhalb des Zeichenblattes.

b) Bei nichtzugänglichem Geschwindigkeitspol (Abb. 6) ist gleichfalls die Anwendung des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck möglich, wenn man für den Endpunkt C der Strecke $SC = i_S$ in bekannter Weise (durch Parallelenziehen) die gedrehte Geschwindigkeit $\overline{v_C}$ bestimmt; die Senkrechte auf $\overline{v_C}$ in C schneidet auf der Richtun von $\overline{v_S}$ den Trägheitsmittelpunkt $T_\mathfrak{P}$ ab[1].

c) Liegt bei nichtzugänglichem Geschwindigkeitspol der Schwerpunkt S auf der geraden Verbindungslinie zweier Punkte *1* und *2* (Abb. 7), deren gedrehte Geschwindigkeiten bekannt sind, so sucht man zunächst $\overline{v_S}$ nach *M. Tolle*[2], indem man den Endpunkt von $\overline{v_2}$ mit *1* und mit dem Endpunkt von $\overline{v_1}$ verbindet. Ziehe dann von S parallel zu $\overline{v_2}$ bis zur ersten Hilfslinie, dann weiter parallel zu $\overline{v_1}$ bis zur zweiten Hilfslinie und erhält dadurch den Endpunkt von $\overline{v_S}$. Man trägt nun wiederum auf der Senkrechten zu $\overline{v_S}$ in S die Strecke $SC = i_S$ auf. Es ergibt sich dann $\overline{v_C}$ durch Parallelenziehen aus $\overline{v}$ und $\overline{v_S}$ und nunmehr in gleicher Weise wie in Abb. 6 der Trägheitsmittelpunkt $T_\mathfrak{P}$.

d) Sind für Punkt *1* und Schwerpunkt S der Scheibe die wirklichen Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_S$ bekannt, so ergibt sich folgende einfache Konstruktion (Abb. 8) für die Wirkungs-

[1] Eine andere Konstruktion des auf $\mathfrak{P}$ bezogenen Trägheitsmittelpunktes $T_\mathfrak{P}$ findet sich bei *M. Tolle*, ZVDI 76 (1932), S. 800, Abb. 7; dort wird von dem zum Punkt *1* gehörigen, auf der Strecke *1S* gelegenen Trägheitsmittelpunkt T_1 Gebrauch gemacht.

[2] *M. Tolle*, Regelung der Kraftmaschinen, 3. Aufl. (1921), S. 19. Die dort angegebene Konstruktion ist für wirkliche Geschwindigkeiten durchgeführt; sie gilt auch für gedrehte Geschwindigkeiten.

linie g_1 der allein von ε abhängigen resultierenden Trägheitskraft. Die Verbindungslinie des Endpunktes von $\bar{v}_S$ mit dem auf *1* bezogenen Trägheitsmittelpunkt T_1 schneidet sich mit der durch den Endpunkt von $\bar{v}_1$ gezogenen Parallelen zu *1 S* im Punkt *A'*, durch welchen, parallel zu $\bar{v}_S$, die Gerade g_1 hindurchgeht. Beweis: Da die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$ angenommen wird, so sind nur senkrecht zu den Polstrahlen stehende Tangentialbeschleunigungen $b_t = \varrho \cdot \varepsilon$ möglich. Die gegebenen Geschwindigkeiten der Scheibe $v = \varrho\,\omega$ sind

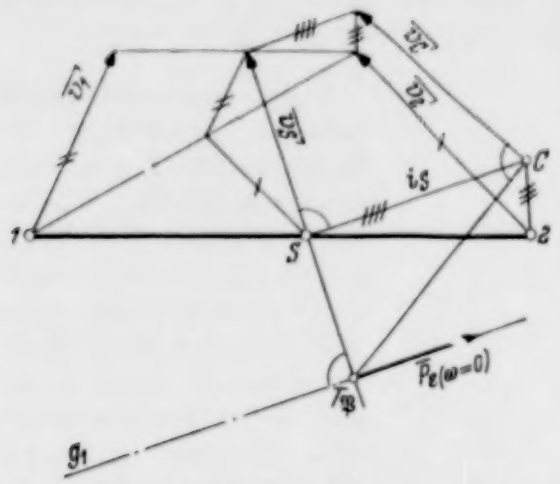

Abb. 7. Lösung der gleichen Aufgabe wie in Abb. 6 für den Fall, daß der Schwerpunkt *S* auf der geraden Verbindungslinie der beiden Punkte 1 und 2 gelegen und der Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ außerhalb des Zeichenblattes liegt.

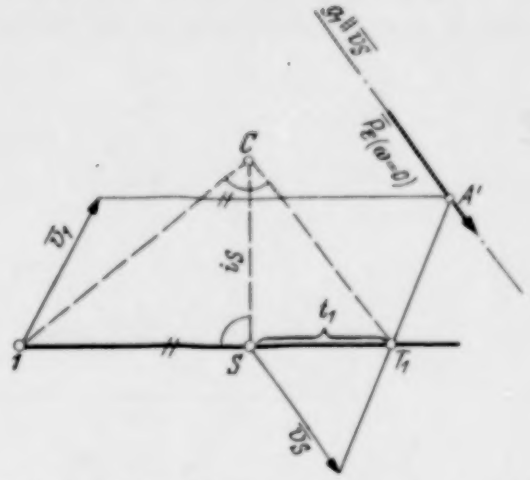

Abb. 8. Gegeben sind die wirklichen Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_S$ der Punkte 1 und *S*, zu bestimmen die Wirkungslinie von $\bar{P}_{\varepsilon(\omega=0)}$.

ebenso wie die Tangentialbeschleunigungen den Polabständen ϱ proportional und haben mit diesen gleiche Richtung, so daß die Wirkungslinie g_1 in der oben angegebenen Weise nach der für Beschleunigungen in Abb. 4 beschriebenen Konstruktion gefunden werden kann. Der Nachweis dafür, daß die für die Beschleunigungen $\bar{b}_1$ und $\bar{b}_S$ gültigen Konstruktionen auch für die Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_S$ angewendet werden dürfen, kann auch folgendermaßen geführt werden:

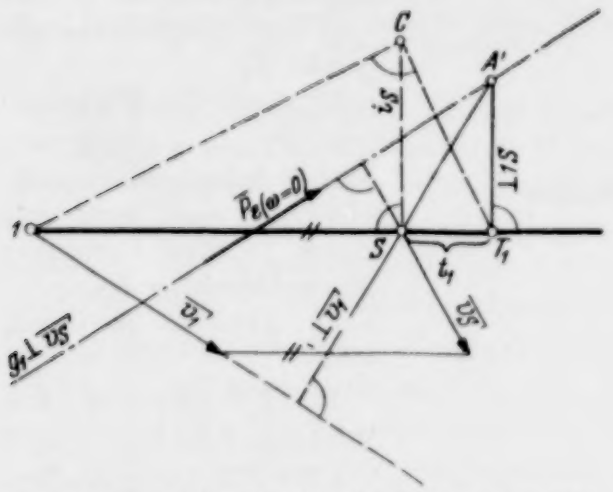

Abb. 9. Lösung wie in Abb. 8 für den Fall, daß die gedrehten Geschwindigkeiten $\overline{v_1}$ und $\overline{v_S}$ bekannt sind.

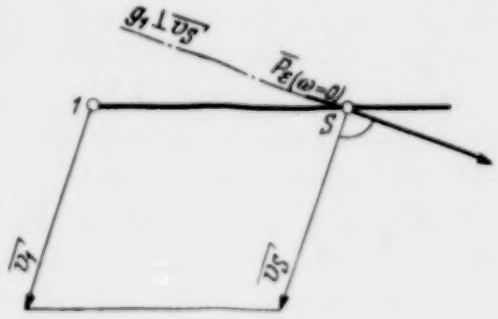

Abb. 10. Sonderfall: Die gedrehten Geschwindigkeiten $\overline{v_1}$ und $\overline{v_S}$ der Punkte 1 und S sind parallel.

Aus $\bar{v}_S = \bar{v}_1 + \bar{v}_{S1}$ folgt durch Differentiation nach der Zeit t

$$\frac{d\bar{v}_S}{dt} = \frac{d\bar{v}_1}{dt} + \frac{d\bar{v}_{S1}}{dt},$$

also

$$\bar{b}_S = \bar{b}_1 + \bar{b}_{S1},$$

d. h. die Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$, $\bar{v}_S$ und $\bar{v}_{S1}$ haben mit den Beschleunigungen gleiche Richtungen und es ergibt sich also aus $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_S$ eine resultierende Trägheitskraft

$$\bar{P}_{\varepsilon(\omega=0)} = -\,m\,\bar{b}_S = -\,m\,\bar{b}_1 + (-\,m\,\bar{b}_{S1}).$$

Die letzte Gleichung entspricht derjenigen, auf Grund deren die bekannten Konstruktionen durchgeführt werden können.

e) Sind anstelle der wirklichen Geschwindigkeiten die gedrehten Geschwindigkeiten $\overline{v}_1$ und $\overline{v_S}$ gegeben, so ergibt sich mit derselben Begründung die entsprechende Konstruktion nach Abb. 9:

Errichte in T_1 die Senkrechte auf $1\,S$ und durch S die Senkrechte auf $\overline{v}_1$, dann schneiden sich beide Linien im Punkt A', durch welchen senkrecht auf $\overline{v_S}$ die gesuchte Wirkungslinie von $\overline{P}_{\varepsilon(\omega=0)}$ hindurchgeht.

f) Für den Sonderfall (Abb. 10), daß $\overline{v_1} \parallel \overline{v_S}$ ist, geht die Gerade $g_1 \perp \overline{v_S}$ unmittelbar durch den Schwerpunkt S der Scheibe hindurch. ($t_{\mathfrak{P}} = i_S^2/\varrho_S = 0$, weil $\varrho_S = \infty$).

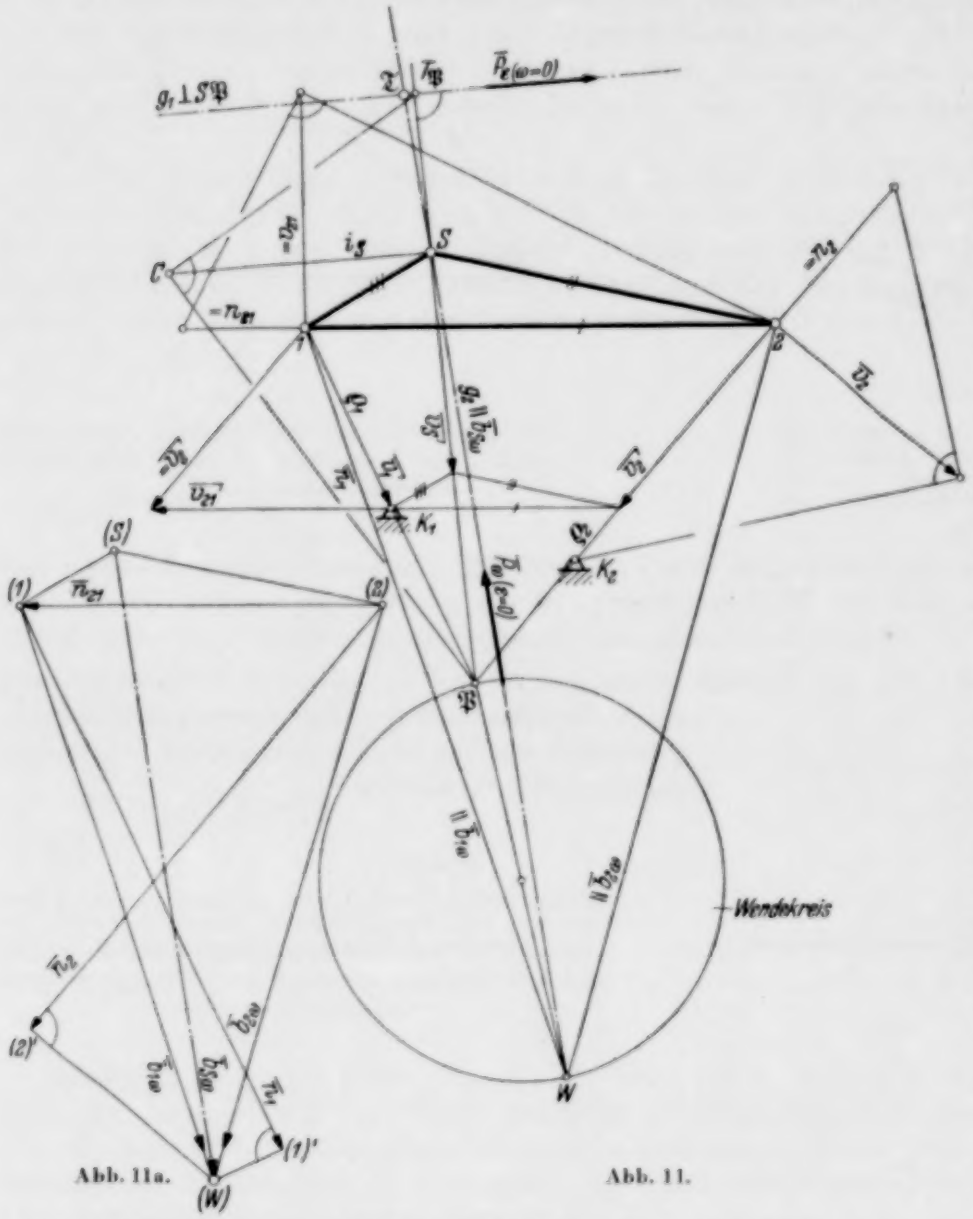

Abb. 11a. Abb. 11.

Abb. 11. Bestimmung des Trägheitspoles, Wendepoles und Wendekreises einer eben bewegten Scheibe mit Hilfe eines „Planes relativer Normalbeschleunigungen" bei zugänglichem Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$.

Abb. 11a. Beschleunigungsplan zu Abb. 11. (Beschleunigungen gegenüber Abb. 11 in dreifacher Größe.)

4. Anwendungen: Zeichnerische Ermittlung des Trägheitspoles $\mathfrak{T}$ einer eben bewegten Scheibe. Wie bereits erwähnt, soll der Trägheitspol $\mathfrak{T}$ als Schnittpunkt der Wirkungslinien zweier resultierender Massenkräfte bestimmt werden, die zwei beliebig angenommenen Beschleunigungszuständen entsprechen.

Die folgenden Lösungen beruhen auf zwei von einander getrennten Annahmen und zwar:

F a l l 1: a) $\omega = 0$: Die Wirkungslinie $\overline{P}_{\varepsilon(\omega=0)}$ geht durch den auf den Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ bezogenen Trägheitsmittelpunkt $T_{\mathfrak{P}}$,

b) $\varepsilon = 0$: Die Wirkungslinie $\overline{P}_{\omega(\varepsilon=0)}$ ist nur vom Geschwindigkeitszustand abhängig und wird aus einem „Plan relativer Normalbeschleunigungen" nach Abb. 2a bestimmt, oder

F a l l 2: a) $\varepsilon = 0$: Die Wirkungslinie $\overline{P}_{\omega(\varepsilon=0)}$ wird wie bei Fall 1b) gefunden.

b) $\varepsilon \neq 0$: Mit Hilfe eines „Planes relativer Normalbeschleunigungen" wird zunächst nach Abb. 3a für eine beliebig angenommene Beschleunigung eines Punktes die zugehörige Schwerpunktsbeschleunigung ermittelt und darauf aus diesen beiden Beschleunigungen die Wirkungslinie von $\overline{P}_\varepsilon$ nach Abb. 4.

5. Beispiele. a) Gegeben in Abb. 11 die gedrehte Geschwindigkeit $\overline{v_1}$, des Punktes *1* sowie die Krümmungsmittelpunkte K_1 und K_2 der Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ ist zugänglich. G e s u c h t der Trägheitspol $\mathfrak{T}$, Wendepol W und Wendekreis. Die Lösung lautet:

Aus $\overline{v_1}$ folgt in bekannter Weise durch Parallelenziehen $\overline{v_2}$ und $\overline{v_S}$. Der auf $\mathfrak{P}$ bezogene Trägheitsmittelpunkt $T_{\mathfrak{P}}$ wird wie in Abb. 5 gefunden; die Senkrechte g_1 in $T_{\mathfrak{P}}$ auf Polstrahl $S\,\mathfrak{P}$ ist die Wirkungslinie von $\overline{P}_{\varepsilon(\omega=0)}$. Aus $\overline{v_{21}} = \overline{v_2} - \overline{v_1}$ findet man $n_{21} = v_{21}^2/12$ (Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck), ebenso $n_1 = v_1^2/\varrho_1$ und $n_2 = v_2^2/\varrho_2$. In Abb. 11a liefert

der „Plan der relativen Normalbeschleunigungen" hieraus, entsprechend Abb. 2a, den Punkt (W) und die von ω für $\varepsilon = 0$ abhängige Schwerpunktsbeschleunigung $\bar{b}_{S\omega}$. Die Parallele g_2 hierzu durch den Schwerpunkt S ist die Wirkungslinie von $\bar{P}_{\omega(\varepsilon=0)}$ und ihr Schnittpunkt mit der erst gefundenen Geraden g_1 der Trägheitspol $\mathfrak{T}$ der Scheibe. Da alle von ω herrührenden Beschleunigungen nach dem Wendepol W hinweisen, so findet sich dieser in Abb. 11 als Schnittpunkt der Parallelen zu $\bar{b}_{1\omega}$ durch *1* mit der Parallelen zu $\bar{b}_{2\omega}$ durch *2*. Die Strecke $\mathfrak{P}W$ ist der Durchmesser des Wendekreises der Scheibe.

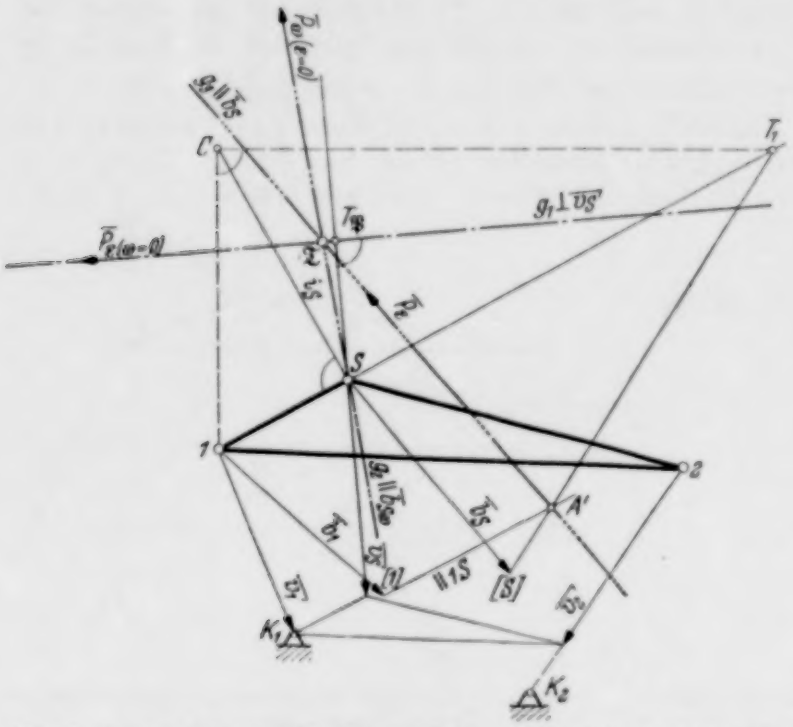

Abb. 12. Konstruktion des Trägheitspoles bei nicht auf dem Zeichenblatt gelegenem Geschwindigkeitspol.

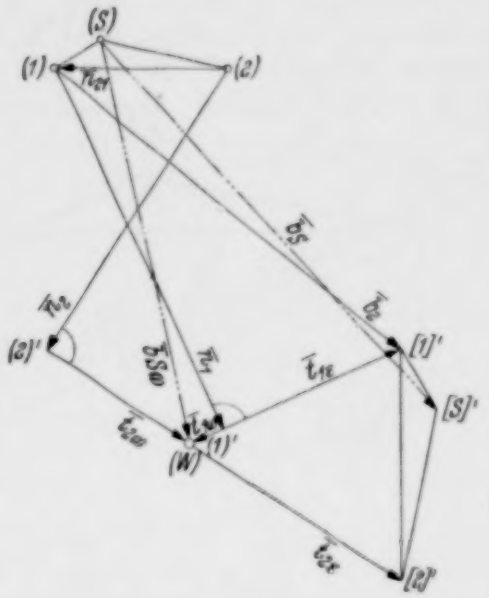

Abb. 12a. Beschleunigungsplan zu Abb. 12. (Beschleunigungen gegenüber Abb. 12 in doppelter Größe.)

b) Dieses Beispiel (Abb. 12) unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur dadurch, daß hier der Geschwindigkeitspol nicht zugänglich ist. Die Lösung der Aufgabe ist mit Hilfe des „Planes der relativen Normalbeschleunigungen" (Abb. 12a) durchgeführt, indem einmal für $\varepsilon = 0$ die durch den Schwerpunkt gehende Gerade $g_2 \parallel \bar{b}_{S\omega}$ (wie in Abb. 2 und 2a) und dann für $\varepsilon \neq 0$ (entsprechend Abb. 3 und 3a) für eine beliebig angenommene Tangentialbeschleunigung $\bar{t}_{1\varepsilon}$ die Beschleunigungen $\bar{b}_1$ und $\bar{b}_S$ ermittelt worden sind. Die Wirkungslinie g_3 der resultierenden Massenkraft $\bar{P}_\varepsilon$, welche durch die beliebig gewählte Winkelbeschleunigung ε bedingt ist, wird dann, wie in Abb. 4 angegeben, aus $\bar{b}_1$ und $\bar{b}_S$ mit Hilfe des auf 1 bezogenen Trägheitsmittelpunktes T_1 gefunden. In Abb. 12 ist dann noch die Wirkungslinie g_1 der resultierenden Trägheitskraft $\bar{P}_{\varepsilon(\omega=0)}$ eingetragen, welche ebenfalls durch den Trägheitspol $\mathfrak{T}$ gehend, auf $\overline{v_S}$ senkrecht steht und hierauf den zum Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ gehörigen Trägheitsmittelpunkt $T_\mathfrak{P}$ abschneidet.

c) Wird, wie in Abb. 13, die Relativgeschwindigkeit $\bar{v}_{21}$ klein, also auch die relative Normalbeschleunigung $\bar{n}_{21}$ klein, dann können in solchem Fall, wie in Abb. 13a gezeigt, auch die Ecken des sehr kleinen, parallel zum Dreieck *1 2 S* gelegenen, ähnlichen Dreiecks $(1)\,(2)\,(S)$, ohne daß dadurch eine wesentliche Ungenauigkeit eintritt, zu Anfangspunkten der von ω herrührenden Beschleunigungen gemacht werden, da ja im Allgemeinen die Normalbeschleunigungen $\bar{n}_1$ und $\bar{n}_2$ verschieden groß sein werden. Der Schnittpunkt (W) der beiden Senkrechten in den Endpunkten $(1)'$ und $(2)'$ auf $\bar{n}_1$ und $\bar{n}_2$ kommt dann meist außerhalb des Zeichenblattes zu liegen. Die Bestimmung der Richtung von $\bar{b}_{S\omega}$ ist, wie Abb. 13a zeigt, durch Zeichnen zweier ähnlicher Dreiecke möglich, d. h. es ist die geometrische Aufgabe zu lösen: von einem Punkt (S) aus die Verbindungslinie nach einem nicht zugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden ($\bar{b}_{1\omega}$ und $\bar{b}_{2\omega}$) zu konstruieren. Praktisch wird es oft genügend genau sein, wenn bei kleinen relativen Normalbeschleunigungen $\bar{n}_{21}$, wie in Abb. 13b, die drei Punkte (1), (2) und (S) in einem Punkt (0) zusammengelegt werden und dieser zum Anfangs-

punkt aller Beschleunigungen gemacht wird. Die Konstruktion des Trägheitspoles $\mathfrak{T}$ in Abb. 13 als Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 ist einerseits mit Hilfe der Lösung nach Abb. 9, andererseits mit Hilfe des „Planes der relativen Normalbeschleunigungen" für den Beschleunigungszustand $\varepsilon = 0$ entsprechend Abb. 2a durchgeführt.

d) Sind im Sonderfall (Abb. 14) die gedrehten Geschwindigkeiten $\overline{v_1}$ und $\overline{v_2}$ parallel, so wird die Relativgeschwindigkeit $\overline{v}_{21} = 0$, daher auch die relative Normalbeschleunigung $\bar{n}_{21} = 0$. Trägt man also in Abb. 14a die Normalbeschleunigungen $\bar{n}_1$ und $\bar{n}_2$, die beide gleich-

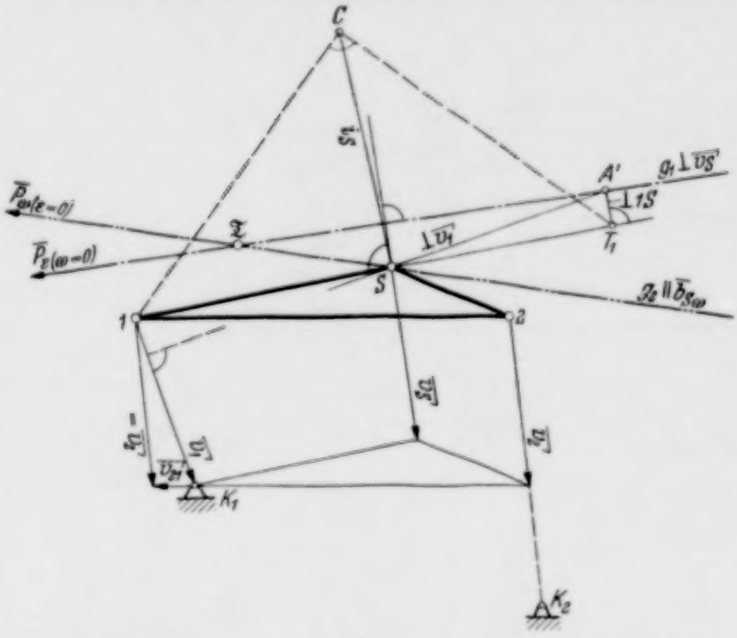

Abb. 13. Bestimmung des Trägheitspoles für den Fall, daß die Relativgeschwindigkeit $\overline{v}_{21}$ des Punktes 2 gegen 1 klein ist.

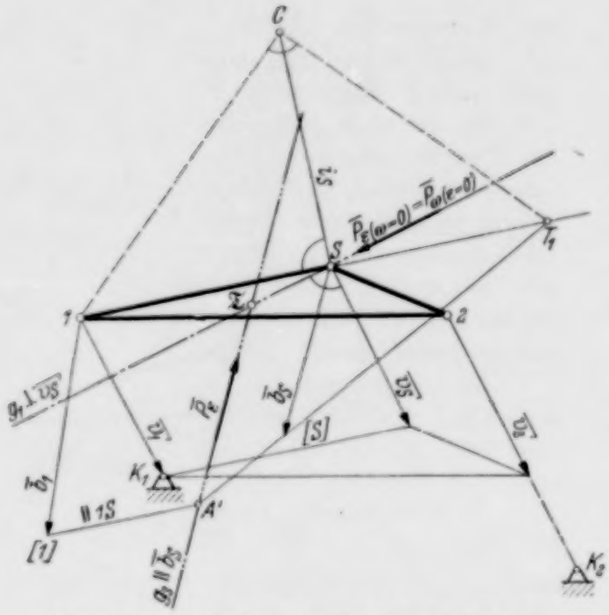

Abb. 14. Sonderfall: Die gedrehten Geschwindigkeiten $\overline{v_1}$ und $\overline{v_2}$ sind parallel, d. h. $\overline{v_{21}} = 0$.

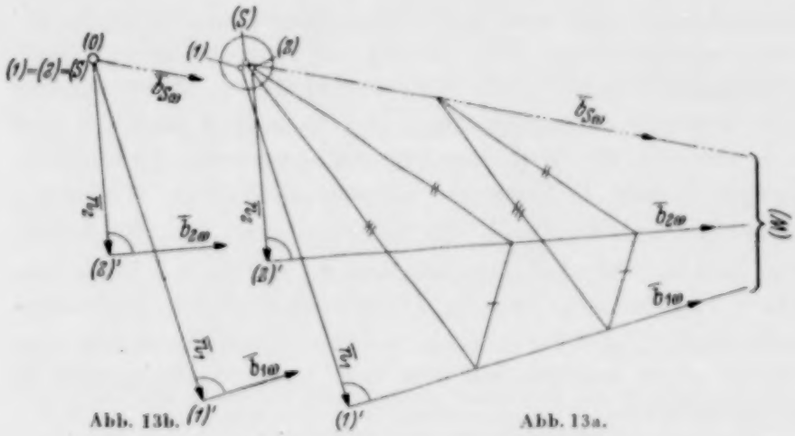

Abb. 13b.

Abb. 13a.

Abb. 13a. Beschleunigungsplan zu Abb. 13.

Abb. 13b. Beschleunigungsplan zu Abb. 13 mit der zulässigen Annahme, daß bei kleiner Relativgeschwindigkeit $\overline{v}_{21}$ die drei Punkte (1), (2) und (S) in einem Punkt (0) zusammengelegt werden.

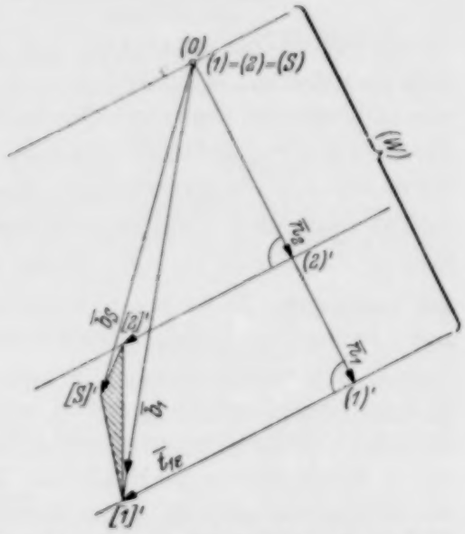

Abb. 14a. Beschleunigungsplan zu Abb. 14. (Beschleunigungen gegenüber Abb. 14 in doppelter Größe.)

gerichtet sind, von (0) aus ab, so erkennt man, daß der Punkt (*W*) im Unendlichen liegt, die Beschleunigung $\bar{b}_{S\omega}$ des Schwerpunktes, weil ebenfalls nach (*W*) gerichtet, auch senkrecht auf $\bar{n}_1$ bzw. $\bar{n}_2$ und somit auch auf $\overline{v_S}$ steht. Die $\bar{b}_{S\omega}$ entgegengesetzt gerichtete resultierende Trägheitskraft $\overline{P}_{\omega(\varepsilon=0)}$ geht durch den Schwerpunkt *S* und fällt, wie in Abb. 10 gezeigt, mit der Wirkungslinie der resultierenden Trägheitskraft $\overline{P}_{\varepsilon(\omega=0)}$ zusammen. Man benötigt daher noch eine weitere Wirkungslinie einer resultierenden Trägheitskraft, die nach Abb. 14a aus dem „Plan der relativen Normalbeschleunigungen" dadurch gefunden werden

kann, daß man, wie in Abb. 3a, eine beliebige Tangentialbeschleunigung $\bar{t}_{1\varepsilon}$ wählt. Errichtet man in deren Endpunkt $[1]'$ die Senkrechte auf *1 2*, so erhält man auf der Parallelen zu $\bar{t}_{1\varepsilon}$ durch $(2)'$ den Endpunkt $[2]'$ der von ε herrührenden Beschleunigung $\bar{b}_2$. Die Senkrechten durch $[1]'$ zu *1 S* und durch $[2]'$ zu *2 S* liefern den Endpunkt $[S]'$ der entsprechenden Schwerpunktsbeschleunigung $\bar{b}_S$ mit ihrem Anfangspunkt in $(S) \equiv (0)$. Nachdem auf diese Weise zwei zusammengehörige, mit der Bewegung der Scheibe verträgliche Beschleunigungen $\bar{b}_1$ und $\bar{b}_S$ gefunden sind, ist in Abb. 14 die Gerade $g_3 \| \bar{b}_S$ als Wirkungslinie der entsprechenden resultierenden Massenkraft $\bar{P}_\varepsilon$ wie in Abb. 4 bestimmt worden. Der gesuchte Trägheitspol $\mathfrak{T}$ liegt im Schnittpunkt der beiden Geraden g_1 und g_3.

e) Zum Schluß soll noch der Fall behandelt werden, bei welchem der Schwerpunkt *S* auf der geraden Verbindungslinie der beiden Punkte *1* und *2* gelegen ist, deren gedrehte Geschwindigkeiten $\overline{v_1}$ und $\overline{v_2}$ als bekannt vorausgesetzt werden (Abb. 15). Hierfür bestimmt man, nachdem die gedrehte Geschwindigkeit $\overline{v_S}$ des Schwerpunktes gefunden ist, zunächst

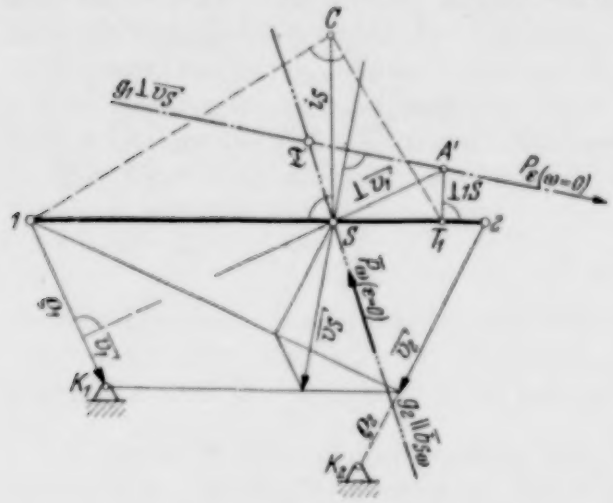

Abb. 15. Der Schwerpunkt *S* liegt auf der geraden Verbindungslinie zweier Punkte 1 und 2 der eben bewegten Scheibe; gegeben $\overline{v_1}$ und $\overline{v_2}$.

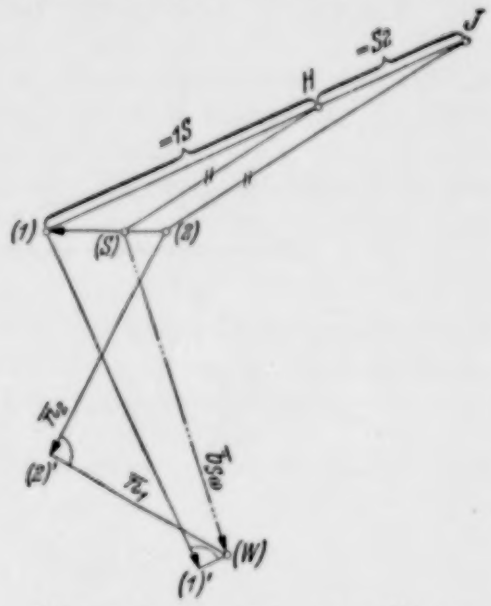

Abb. 15a. Beschleunigungsplan zu Abb. 15.

die Wirkungslinie g_1 der resultierenden Trägheitskraft $\bar{P}_{\varepsilon(\omega=0)}$, z. B. in Abb. 15 nach der Konstruktion der Abb. 9 mit Hilfe des auf *1* bezogenen Trägheitsmittelpunktes T_1 aus $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_S$.

Im „Plan der relativen Normalbeschleunigungen" nach Abb. 15a wird, nachdem zuvor wiederum $n_{21} = v_{21}^2/1\,2$, $n_1 = v_1^2/\varrho_1$ und $n_2 = v_2^2/\varrho_2$ bestimmt worden sind, die Lage des Punktes (S) auf der Geraden $(1)\,(2)$, etwa nach dem Strahlensatz wie folgt gefunden: Ziehe von (1) aus eine beliebige Gerade und trage auf dieser die Strecken $(1)\,H = 1S$ und hierauf weiter $H\,J = S\,2$ auf, verbinde J mit (2), dann schneidet die Parallele zu $J\,(2)$ durch H auf $(1)\,(2)$ den gesuchten Punkt (S) ab. Man findet dann in der Strecke $(S)\,(W)$ die von ω herrührende Schwerpunktsbeschleunigung $\bar{b}_{S\,\omega}$ und zu dieser parallel durch *S* gehend die Wirkungslinie g_2 der resultierenden Massenkraft, welche für $\varepsilon = 0$ allein von ω herrührt. Die Geraden g_1 und g_2 schneiden sich im Trägheitspol $\mathfrak{T}$ der Scheibe.

6. Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes von Koppelkurven mit Hilfe eines „Planes relativer Normalbeschleunigungen".

Die meisten bekannten Methoden zur zeichnerischen Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes für die Bahn eines Koppelpunktes setzen voraus, daß der Geschwindigkeitspol zugänglich ist, daß ferner z. B. der auf dem Normalstrahl des Koppelpunktes gelegene Wendepunkt (Zickzackkonstruktion von *Grübler*[1]) oder, zur Anwendung des *Bobillier*schen Satzes, der Wendekreis, der Wendepol oder die Polbahntangente (*Aronhold*sche Konstruktion[2]) bekannt ist. Das Verfahren von *Hartmann*[3] beruht auf der Verwendung der Polwechselge-

[1] *M. Grübler*, Getriebelehre (1917), S. 120.
[2] *S. Aronhold*, Grundzüge der kinematischen Geometrie 1872.
[3] *W. Hartmann*, Maschinengetriebe 1913.

schwindigkeit. Von den vorstehenden Bedingungen frei ist das Verfahren von *Pöschl*[1]; ausgehend von der Gleichung für die Normalbeschleunigung $n_3 = v_3^2/\varrho_3$ findet man den Krümmungshalbmesser ϱ_3 für die Bahn eines beliebigen Punktes *3*, wenn neben der Geschwindigkeit $\bar{v}_3$ dessen Normalbeschleunigung $\bar{n}_3$ bekannt ist. Nimmt man an, daß von einer bewegten Scheibe die gedrehten Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$ zweier Punkte *1* und *2*, sowie deren Krümmungsmittelpunkte K_1 und K_2 gegeben sind, so wird nach *Pöschl* zunächst in bekannter Weise die gedrehte Geschwindigkeit $\bar{v}_3$ des Koppelpunktes *3* bestimmt. Nach Wahl einer beliebigen Beschleunigung $\bar{b}_1$ wird dann die des Punktes *2* aufgesucht und aus $\bar{b}_1$ und $\bar{b}_2$ nach dem Satz von *Burmester* die Beschleunigung $\bar{b}_3$ des Punktes 3 gefunden. Die Normale zur Bahnkurve ist durch die Richtung von $\bar{v}_3$ gegeben; die in diese Richtung fallende Komponente $\bar{n}_3$ von $\bar{b}_3$ liefert den gesuchten Krümmungshalbmesser ϱ_3 und nach Halbkreiskonstruktion daraus den Krümmungsmittelpunkt K_3.

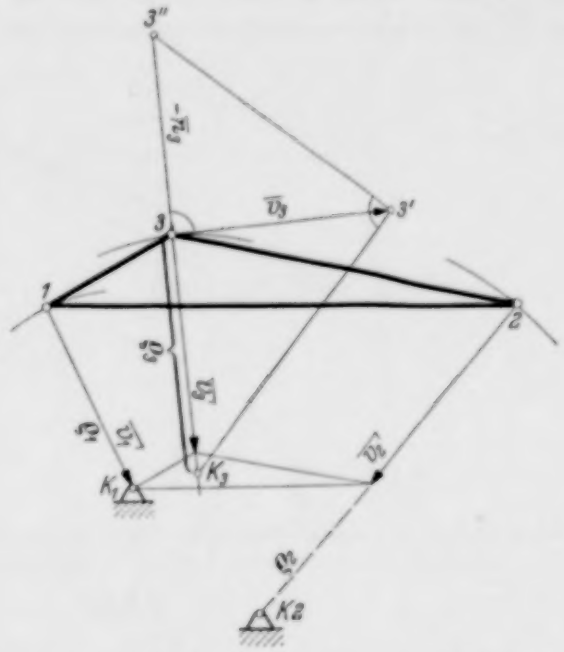

Abb. 16. Neue Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes von Koppelkurven mit Hilfe eines „Planes relativer Normalbeschleunigungen".

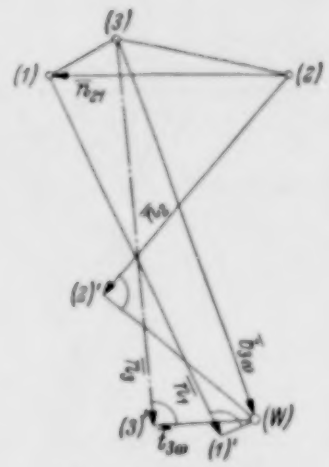

Abb. 16a. Beschleunigungsplan zu Abb. 16.

In der nun folgenden neuen Konstruktion wird ebenfalls davon ausgegangen, daß von der Scheibe in Abb. 16 die gedrehten Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$ der Punkte *1* und *2* bekannt sind, desgleichen für diese die Krümmungsmittelpunkte K_1 und K_2. Zeichnet man aus $n_{21} = v_{21}^2/l\,2$, $n_1 = v_1^2/\varrho_1$ und $n_2 = v_2^2/\varrho_2$ den „Plan der relativen Normalbeschleunigungen" in Abb. 16a, so findet man $\bar{b}_{3\omega}$, d.h. die nur von ω herrührende Beschleunigung nach Richtung und Größe als die Strecke (*3*) (*W*). Zerlegt man dann $\bar{b}_{3\omega}$ in ihre beiden Komponenten $\bar{n}_3$ in Richtung von $\bar{v}_3$ und $\bar{t}_{3\omega}$ senkrecht dazu, so ist $\bar{n}_3$ nach Größe und Richtung die Normalbeschleunigung des Koppelpunktes *3*. In Abb. 16 ist nun der Krümmungsmittelpunkt K_3 nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck hieraus folgendermaßen gefunden: Trage im Punkt *3* die wirkliche Geschwindigkeit $\bar{v}_3$ (Endpunkt 3′) und ebenso von *3* aus die im Beschleunigungsplan Abb. 16a gefundene Normalbeschleunigung $\bar{n}_3$ in entgegengesetzter Richtung auf (Endpunkt *3''*). Die Senkrechte in *3′* auf die Verbindungslinie der Punkte *3''* und *3′* schneidet auf der Richtung von $\bar{v}_3$ den gesuchten Krümmungsmittelpunkt K_3 ab. — Auch diese Lösung ist, sofern der Krümmungsmittelpunkt überhaupt auf das Zeichenblatt fällt, in allen Fällen möglich, da, wie eingangs gezeigt, ein „Plan relativer Normalbeschleunigungen" stets gezeichnet werden kann.

(Eingegangen am 29. September 1953.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dipl.-Ing. *O. Tolle*, Konstanz (Bodensee), Bahnhofplatz 10.

[1] *Th. Pöschl*, Einführung in die ebene Getriebelehre (1932), S. 71.

Über den geraden Knickstab mit begrenzter Durchbiegung.

Von H. Link

1. Einleitung und Voraussetzungen. In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten eines geraden dünnen Knickstabes untersucht, dessen Durchbiegung nach beiden Seiten durch ebene, starre Flächen begrenzt wird. Die zwei zueinander parallelen Begrenzungsflächen sind senkrecht zur Verformungsebene des Stabes angeordnet und haben beide von dem zwischen ihnen befindlichen Stab den gleichen Abstand f. Das Maß f gibt die größte mögliche Durchbiegung des Stabes an und soll sehr klein gegen dessen Länge sein.

Der Stab wird aus einem Werkstoff mit linearem Elastizitätsgesetz angenommen und soll alle im Verlauf der Untersuchung vorkommenden Verformungen ertragen können. Die Biegesteifigkeit EJ ist über die Stablänge unveränderlich.

Es werden der an beiden Enden gelenkig, der an beiden Enden eingespannt und der an einem Ende gelenkig, am anderen Ende eingespannt gelagerte Stab behandelt. In allen Fällen ist eine seitliche Unverschieblichkeit der Stabenden unterstellt.

Die Grundlage aller durchgeführten Betrachtungen ist die Differentialgleichung des gebogenen, geraden Stabes

$$E J y'' = - M , \tag{1}$$

die den Zusammenhang zwischen der Durchbiegung y des Stabes und dem Biegungsmoment M ausdrückt. Der Einfluß der Querkraft auf die Stabverformung ist nicht berücksichtigt. Ebenfalls sind Reibungskräfte, wo solche etwa auftreten können, vernachlässigt.

2. Der an beiden Enden gelenkig gelagerte Stab. Mit den Bezeichnungen der Abb. 1 wird das Biegungsmoment im Stab an der Stelle x

$$M = P y - Q x .$$

Damit geht (1) über in

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{Q}{E J} x \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{P}{E J}$$

und hat die allgemeine Lösung

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{Q}{P} x .$$

Mit den Grenzbedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $y' = 0$ für $x = \frac{l}{2}$ ergeben sich die Konstanten daraus zu

$$A = - \frac{Q}{P \alpha} \frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} \quad \text{und} \quad B = 0 .$$

Aus der Forderung, daß sich die Stabmitte um das Maß f durchbiegen soll, folgt für die Stützkraft Q als Funktion von α in dimensionsloser Darstellung

$$\frac{Q l^3}{8 E J f} = - \frac{\left(\frac{\alpha l}{2}\right)^3}{\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}} . \tag{2}$$

Der Verlauf von (2) ist in Abb. 2 dargestellt. Der Wert $Q l^3/8\, EJ\, f$ ist zunächst negativ. Die Kräfte Q müßten daher für kleine Werte $\alpha l/2$ zur Erzeugung der Durchbiegung f in der Stabmitte entgegengesetzt wie in Abb. 1 dargestellt wirken. Für $\alpha l/2 = 0$ ergibt sich der aus der Biegelehre bekannte Wert $Ql^3/8EJf = -3$, und für $\alpha l/2 = \pi/2$ wird $Q = 0$. Die zugehörige Stabkraft hat dann die Größe $P = \pi^2/l^2 \cdot EJ$ der *Euler*schen Knickkraft eines an beiden Enden gelenkig gelagerten Stabes von der Länge l. Für $\alpha l/2 = \pi$ wird $Q l^3/8\, EJf = \pi^2$.

Die zugehörige Stabkraft ist

$$P = \frac{\pi^2}{(l/2)^2} E J = 4 \frac{\pi^2}{l^2} E J$$

und entspricht der *Euler*schen Knickkraft eines an beiden Enden gelenkig gelagerten Stabes von der Länge $l/2$ oder eines an beiden Enden eingespannten Stabes von der Länge l. Schließlich geht noch für $\alpha\, l/2 \to 1{,}43\,\pi$ die Stützkraft $Q \to \infty$, wobei die Stabkraft die Größe

$$P = 2{,}045 \frac{\pi^2}{(l/2)^2} E J$$

hat. Diese Stabkraft entspricht der *Euler*last eines an einem Ende gelenkig, am anderen Ende eingespannt gelagerten Stabes von der Länge $l/2$.

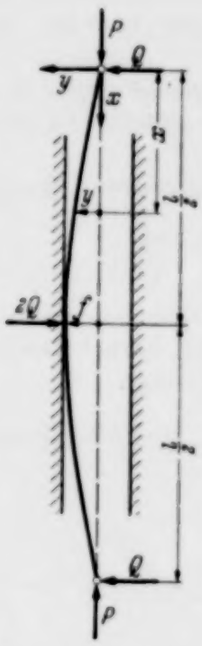

Abb. 1. Der an beiden Enden gelenkig gelagerte Stab. Stabform für $\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\alpha l}{2} \leqq \pi$.

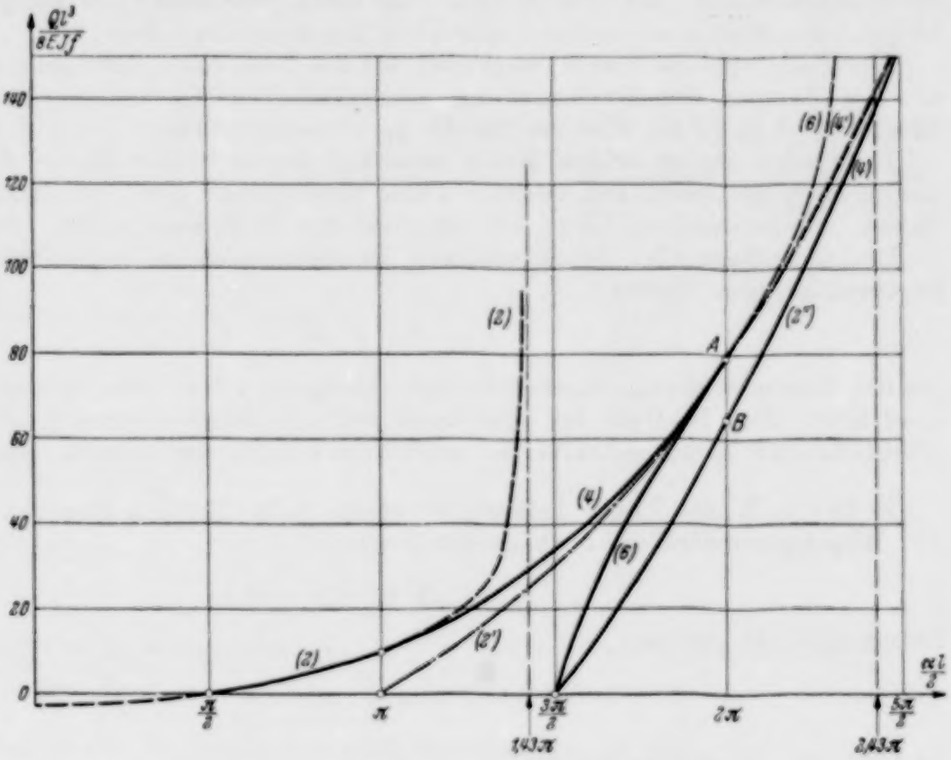

Abb. 2. $\frac{Q l^3}{8 E J f}$ in Abhängigkeit von $\frac{\alpha l}{2}$.

Die Durchbiegung des Stabes wird unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen und der Gleichung (2)

$$y = \frac{f}{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}} \left(\frac{\sin \alpha x}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - \alpha x \right). \tag{3}$$

Der durch Abb. 1 charakterisierte Belastungs- und Verformungszustand des Stabes kann bei wachsendem P nur solange bestehen, bis $\alpha\, l/2 = \pi$ geworden ist. Aus der zweiten Ableitung der Gleichung (3) folgt nämlich bei Beschränkung auf die nächste Umgebung von $\alpha\, l/2 = \pi$

$$(y'')_{x=l/2} = -f \frac{\alpha^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}} \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad \frac{\alpha l}{2} < \pi, \\ = 0 & \text{für} \quad \frac{\alpha l}{2} = \pi, \\ > 0 & \text{für} \quad \frac{\alpha l}{2} > \pi. \end{cases}$$

Eine positive Krümmung der Stabmitte, wie sie sich für $\alpha\, l/2 > \pi$ ergibt, ist wegen der Art der Durchbiegungsbegrenzung nicht möglich, da dazu der verformte Stab die in Abb. 3 dargestellte Form haben müßte. Die Gleichungen (2) und (3) sind daher nur solange gültig,

bis die Stabkrümmung an der Anlagestelle gleich der Krümmung der die Durchbiegung begrenzenden Fläche wird.

Bei weiterer Steigerung von $P(\alpha\, l/2 > \pi)$ teilt sich die Stützkraft $2Q$ in zwei Einzelkräfte Q, die symmetrisch zur Stabmitte angreifen, wie es in Abb. 4 dargestellt ist. Mit den dort verwendeten Bezeichnungen werden die Biegungsmomente im Stab

$$M_1 = P\,y_1 - Q\,x_1\,, \qquad M_2 = P\,y_2 - Q\,x_0\,,$$

und die allgemeinen Lösungen von (1) lauten, wenn für x_1 und x_2 einfach x geschrieben wird,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin \alpha x + B_1 \cos \alpha x + \frac{Q}{P}\,x \\ y_2 &= A_2 \sin \alpha x + B_2 \cos \alpha x + \frac{Q}{P}\,x_0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{mit} \qquad \alpha^2 = \frac{P}{E\,J}\,.$$

Daraus ergibt sich mit den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \text{ für } x = 0\,, \\ y_1 &= f \text{ für } x = x_0\,, \\ y_2 &= f \text{ für } x = x_0\,, \\ y_1' &= 0 \text{ für } x = x_0\,, \\ y_2' &= 0 \text{ für } x = x_0\,, \\ y_2' &= 0 \text{ für } x = l/2 \end{aligned}$$

$B_1 = 0$ und das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} f &= A_1 \sin \alpha x_0 + \frac{Q}{P}\,x_0\,, \\ f &= A_2 \sin \alpha x_0 + B_2 \cos \alpha x_0 + \frac{Q}{P}\,x_0\,, \\ 0 &= A_1 \alpha \cos \alpha x_0 + \frac{Q}{P}\,, \\ 0 &= A_2 \cos \alpha x_0 - B_2 \sin \alpha x_0\,, \\ 0 &= A_2 \cos \frac{\alpha l}{2} - B_2 \sin \frac{\alpha l}{2}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Abb. 3. Nicht mögliche Stabverformung für $\frac{\alpha l}{2} > \pi$.

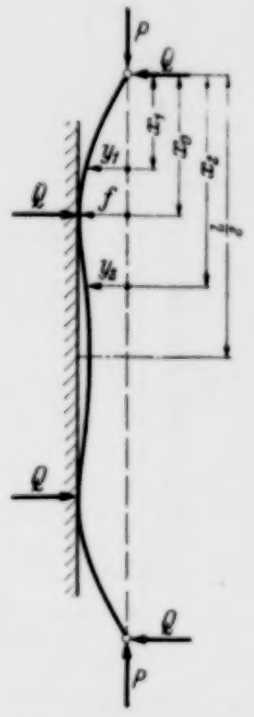

Abb. 4. Mögliche Stabverformung für $\frac{\alpha l}{2} > \pi$.

Die beiden letzten Gleichungen dieses Systems können nur befriedigt werden entweder durch

$$\text{a)}\quad A_2 = B_2 = 0$$

oder durch

$$\text{b)}\quad \frac{\alpha l}{2} = n\pi + \alpha x_0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Die Bedeutung dieser beiden Bedingungen wird nachfolgend untersucht.

a) $A_2 = B_2 = 0$. Mit dieser Bedingung ergeben sich aus dem Gleichungssystem (*) die Beziehungen

$$f = \frac{Q}{P}\,x_0\,, \qquad A_1 \sin \alpha x_0 = 0\,, \qquad A_1 = -\frac{Q}{P\alpha}\,\frac{1}{\cos \alpha x_0}\,. \qquad (**)$$

Wegen $A_1 \neq 0$ folgt aus der mittleren dieser Gleichungen $\sin \alpha x_0 = 0$ oder $\alpha x_0 = n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Mit $n = 1$ wird dann aus der ersten der drei Gleichungen (**)

$$\frac{Q\,l^3}{8\,E\,J\,f} = \frac{\left(\frac{\alpha l}{2}\right)^3}{\pi}\,. \qquad (4)$$

Der Verlauf von (4) ist ebenfalls in Abb. 2 aufgetragen.

Für die elastische Linie dieses Belastungszustandes gelten dann die Gleichungen

$$y_1 = \frac{f}{\pi}\,(\sin \alpha x + \alpha x), \qquad y_2 = f\,.$$

Der verformte Stab und die daran angreifenden Kräfte sind in Abb. 5 dargestellt. Die Resultierende aus P und Q am Stabende geht dabei stets durch den Stabquerschnitt im Abstand x_0 vom Stabende hindurch.

In Abb. 6 ist das Verhältnis $x_0 : l/2$ in Abhängigkeit von $\alpha l/2$ nach der für $n = 1$ geltenden Gleichung

$$\frac{x_0}{l/2} = \frac{\pi}{\alpha\, l/2}$$

dargestellt.

b) $\frac{\alpha\, l}{2} = n\,\pi + \alpha x_0$. Mit $n = 1$ wird aus dieser Bedingung

$$\frac{x_0}{l/2} = 1 - \frac{\pi}{\alpha\, l/2}.$$

Der Verlauf dieser Funktion ist auch in Abb. 6 eingetragen. Mit Hilfe von $\alpha l/2 = \pi + \alpha x_0$ ergibt sich aus dem Gleichungssystem (*)

$$\frac{Q\, l^3}{8\, E\, J\, f} = \frac{\left(\frac{\alpha\, l}{2}\right)^3}{\frac{\alpha\, l}{2} - \pi - \operatorname{tg}\frac{\alpha\, l}{2}}. \tag{6}$$

Der Verlauf von (6) kann der Abb. 2 entnommen werden.

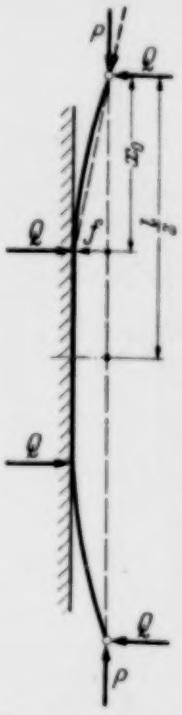

Abb. 5. Stabform für $\pi \leqq \frac{\alpha\, l}{2} \leqq 2\,\pi$ nach der Bedingung a).

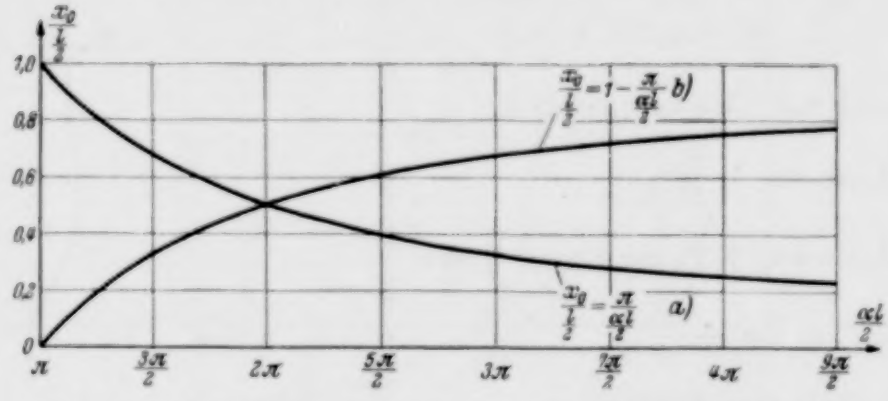

Abb. 6. $x_0 : l/2$ in Abhängigkeit von $\alpha\, l/2$ nach den Bedingungen a) und b).

Für die elastische Linie des verformten Stabes gelten die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{f}{\frac{\alpha\, l}{2} - \pi - \operatorname{tg}\frac{\alpha\, l}{2}}\left(\frac{\sin \alpha\, x}{\cos\frac{\alpha\, l}{2}} + \alpha\, x\right), \\ y_2 &= \frac{f}{\frac{\alpha\, l}{2} - \pi - \operatorname{tg}\frac{\alpha\, l}{2}}\left\{\operatorname{tg}\frac{\alpha\, l}{2}\cos\left[\alpha\left(\frac{l}{2} - x\right)\right] + \frac{\alpha\, l}{2} - \pi\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Stabform und die am Stab angreifenden Kräfte zeigen Abb. 7a für $2\,\pi > \alpha\, l/2 > 3\,\pi/2$ und Abb. 7b für $\alpha\, l/2 = 3\,\pi/2$.

Der sich aus den bisherigen Ableitungen ergebende Verformungsvorgang des Stabes stellt sich in Abhängigkeit von der Stablast folgendermaßen dar:

Ab $\alpha l/2 = \pi/2$ wird mit wachsendem P die Krümmung der an der ebenen Stützfläche anliegenden Stabmitte (Abb. 1) immer kleiner und verschwindet schließlich für $\alpha l/2 = \pi$. Bei weiterer Steigerung von P bildet sich ein an der Stützfläche anliegender, zur Stabmitte symmetrischer, ungekrümmter und damit momentenfreier Teil des Stabes aus, an dessen beiden Enden die Einzelkräfte Q angreifen (Abb. 5). Die Länge dieses anliegenden Stabteiles wächst mit der Stablast, wodurch sich die Stützkräfte Q zu den Stabenden hin verschieben.

Für $\alpha l/2 = 2\,\pi$ erreicht der gerade Teil des Stabes die Länge $l/2$. Das zugehörige P entspricht der Eulerlast eines an beiden Enden eingespannten Stabes von der Länge $l/2$, so daß jetzt der gerade Teil des Stabes ausknicken kann. Dabei entfernen sich die Kräfte Q weiter von der Stabmitte, so daß während des Ausknickens die Knicklänge wächst. Der Knickvorgang kann daher mit kleiner werdender Stablast P aufrecht erhalten werden. Es tritt

Durchschlagen der Stabmitte ein, wenn die Last P die der Beziehung $\alpha l/2 = 2\pi$ entsprechende Größe beibehält. Hierbei geht der Stab von der in Abb. 5 dargestellten Form sofort in die Form der Abb. 7b über. Dieser Vorgang erfolgt schlagartig und sein Ablauf wird anschaulich klar bei Betrachtung des mit (6) bezeichneten Kurvenzuges der Abb. 2. Hiernach nimmt beim Übergang von der in Abb. 5 dargestellten Stabform zu der in Abb. 7b gezeigten der Wert $\alpha l/2$ ab.

Wird der nach Abb. 7b verformte und mit $\alpha l/2 = 3\pi/2$ belastete Stab ($Q = 0$) als neue Anfangsform aufgefaßt, weil sie in ihren Teilen der Stabform nach Abb. 1 bei einer Belastung $\alpha l/2 = \pi/2$ mit ebenfalls $Q = 0$ völlig entspricht, so gelten bei Steigerung von P die gleichen Überlegungen für jedes Stabdrittel, wie sie für den ganzen Stab durchgeführt worden sind. Alle

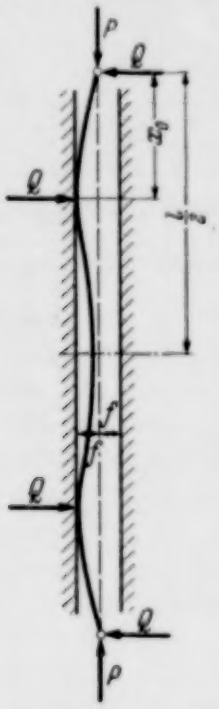

Abb. 7a. Stabform für $2\pi > \frac{\alpha l}{2} > \frac{3\pi}{2}$ nach der Bedingung b).

Abb. 7b. Stabform für $\frac{\alpha l}{2} = \frac{3\pi}{2}$ nach der Bedingung b).

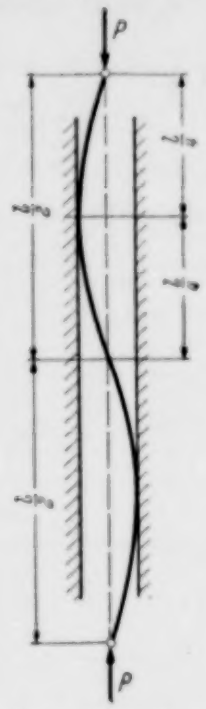

Abb. 8. Eine weitere, mögliche Stabform für $\frac{\alpha l}{2} = \pi$.

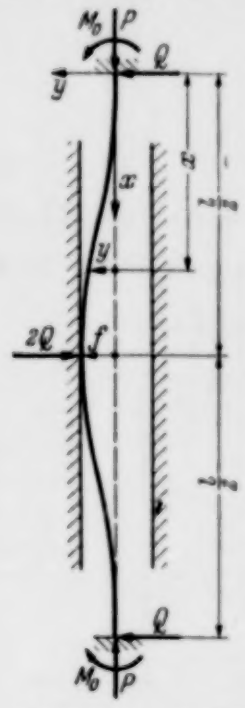

Abb. 9. Der an beiden Enden eingespannt gelagerte Stab. Stabform für $\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\alpha l}{4} \leqq \pi$.

abgeleiteten Formeln behalten daher Gültigkeit, wenn in ihnen unter Beibehaltung der Bedeutung von Q als Querkraft an den Stabenden die Stablänge l durch $l/3$ ersetzt wird. Kurvenzug (2″) in Abb. 2 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen Q und P für diesen Fall im Bereich $3\pi/2 \leqq \alpha l/2 \leqq 5\pi/2$. Bei dem vorerwähnten Durchschlagen der Stabmitte springt bei der Belastung $\alpha l/2 = 2\pi$ der Wert $Ql^3/8\,EJf$ von Punkt A der Kurve (4) nach Punkt B der Kurve (2″).

Noch ein Umstand soll hier erwähnt werden. Für $\alpha l/2 = \pi$ ist nicht nur die hier erwähnte Stabform, sondern auch die in Abb. 8 dargestellte möglich. Mit $\alpha l/2 = \pi$ ($Q = 0$) als Anfangsbelastung für diese Stabform gelten dann ebenfalls die bisher abgeleiteten Beziehungen, wenn in ihnen l durch $l/2$ ersetzt wird. Die Kurvenzüge (2′) und (4′) der Abb. 2 geben den zugehörigen Zusammenhang zwischen Q und P für diesen Fall an.

3. Der an beiden Enden eingespannt gelagerte Stab. Die Untersuchung verläuft im ersten Teil genau wie beim Stab mit beiderseits gelenkig gelagerten Enden. Nach Überschreitung der *Euler*schen Knicklast stützt sich der Stab gegen eine der Flächen ab, wie es in Abb. 9 dargestellt ist. Mit den dort verwendeten Bezeichnungen ergibt sich mit Hilfe der Grenzbedingungen aus der allgemeinen Lösung von (1)

$$\frac{Q\,l^3}{32\,EJf} = -\frac{\left(\frac{\alpha l}{4}\right)^3}{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4} - \frac{\alpha l}{4}}, \tag{8}$$

$$\frac{M_0\,l^2}{8\,EJf} = \frac{\left(\frac{\alpha l}{4}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4} - \frac{\alpha l}{4}}.$$

Für die elastische Linie des verformten Stabes gilt die Gleichung

$$y = \frac{f}{2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4} - \frac{\alpha l}{4}\right)}\left[\sin \alpha x + \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4}(1 - \cos \alpha x) - \alpha x\right]. \tag{9}$$

Die Stabkrümmung an der Anlagestelle verschwindet für $\alpha l/4 = \pi$. Bis dahin haben die angeschriebenen Formeln Gültigkeit.

Für Werte $\alpha l/4 > \pi$ ergeben sich mit den Bezeichnungen von Abb. 10 die beiden voneinander unabhängigen Lösungen

$$\text{a)}\ A_2 = B_2 = 0,$$

$$\text{b)}\ \frac{\alpha l}{2} = n\pi + \alpha x_0\ (n = 1, 2, 3 \cdots).$$

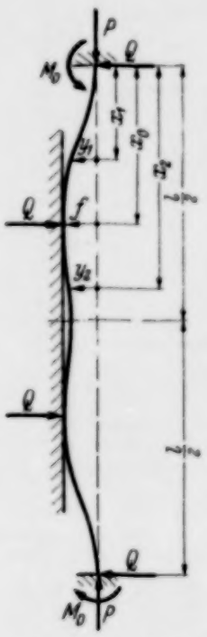

Abb. 10. Mögliche Stabverformung für $\frac{\alpha l}{4} > \pi$.

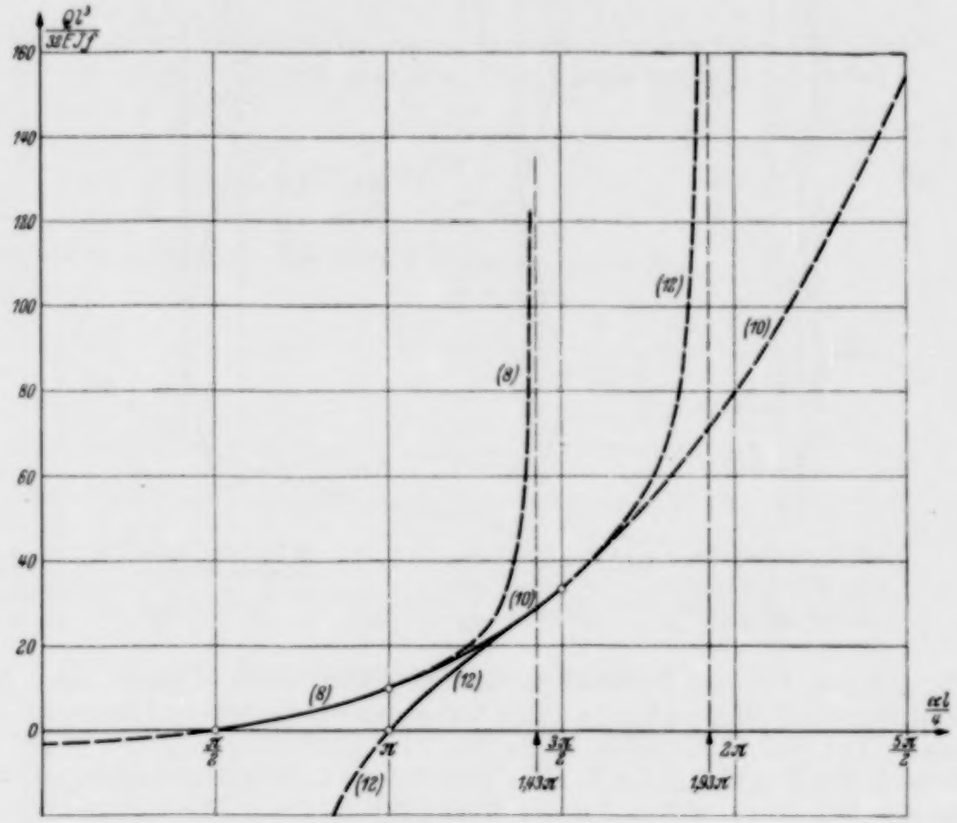

Abb. 11. $\frac{Ql^3}{32EJf}$ in Abhängigkeit von $\frac{\alpha l}{4}$.

Mit der Bedingung a) folgt aus dem hier nicht angeschriebenen, mit Hilfe der Grenzbedingungen aus den allgemeinen Lösungen von (1) gewonnenen Gleichungssystem $\alpha x_0 = 2\pi n$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ und damit, wenn für $n = 1$ gesetzt wird,

$$\frac{Ql^3}{32EJf} = \frac{\left(\frac{\alpha l}{4}\right)^3}{\pi}, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ y_1 &= \frac{f}{2\pi}(\alpha x - \sin \alpha x), \\ y_2 &= f. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Bedingung b) liefert mit $n = 1$ auf die gleiche Weise

$$\frac{Ql^3}{32EJf} = \frac{\left(\frac{\alpha l}{4}\right)^3}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{4} + \frac{\alpha l}{4} - \frac{\pi}{2}}, \tag{12}$$

$$\frac{M_0 l^2}{8 E J f} = \frac{\left(\frac{\alpha l}{4}\right)^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha l}{4}}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha l}{4} + \frac{\alpha l}{4} - \frac{\pi}{2}},$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f\left\{1 - \frac{1}{2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{4} + \frac{\alpha l}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} \left\{\sin\left[\alpha\left(\frac{l}{2} - x\right)\right] + \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{4}\left\{1 + \cos\left[\alpha\left(\frac{l}{2} - x\right)\right]\right\} + \alpha\left(\frac{l}{2} - x\right) - \pi\right\}\right\} \\ y_2 &= f\left\{1 - \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{4}}{2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{4} + \frac{\alpha l}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}\left\{1 + \cos\left[\alpha\left(\frac{l}{2} - x\right)\right]\right\}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

In Abb. 11 ist der Verlauf der Funktionen (8), (10) und (12), und in Abb. 12 der Verlauf von $\frac{x}{l/2} = \frac{\pi}{\alpha\, l/4}$ entsprechend der Bedingung a) und $\frac{x_0}{l/2} = 1 - \frac{\pi/2}{\alpha\, l/4}$ entsprechend der Bedingung b) aufgetragen.

Die Abb. 13a, 13b und 13c zeigen die Stabformen nach (13) für die Belastungen $\alpha l/4 = 3\pi/2$, $\alpha l/4 = \pi$ und $\alpha l/4 < \pi$. Die Belastung P des in Abb. 13a dargestellten Stabes entspricht gerade der *Euler*last eines an beiden Enden eingespannten Stabes von der Länge $l/3$, so daß der gerade Teil des Stabes ausknicken kann. Der Knickvorgang kann wegen der zunehmenden Länge des mittleren Stabteiles mit kleiner werdender Stablast aufrecht erhalten werden. Bei konstant gehaltener Stablast schlägt daher die Stabmitte durch.

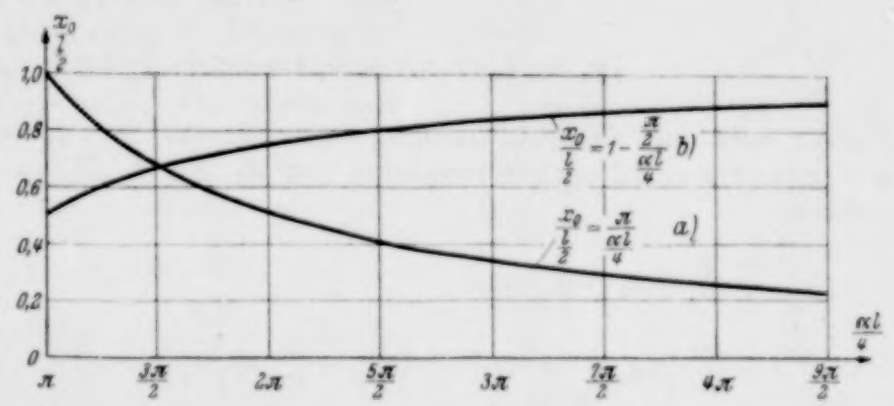

Abb. 12. $x_0 : l/2$ in Abhängigkeit von $\frac{\alpha l}{4}$ nach den Bedingungen a) und b).

Für $\alpha l/4 = \pi$ verschwindet die Durchbiegung in der Stabmitte und die Stützkräfte werden $Q = 0$, wie es in Abb. 13b dargestellt ist. Für Belastungswerte $\alpha l/4 < \pi$ sind zur Aufrecht-

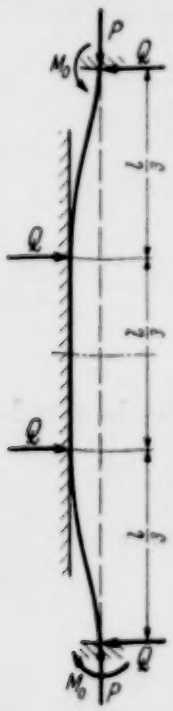

Abb. 13a. Stabform für $\frac{\alpha l}{4} = \frac{3\pi}{2}$.

Abb. 13b. Stabform für $\frac{\alpha l}{4} = \pi$.

Abb. 13c. Stabform für $\frac{\alpha l}{4} < \pi$.

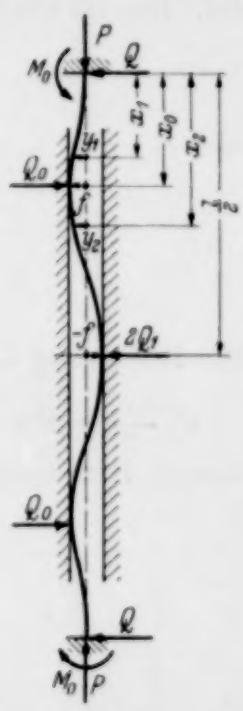

Abb. 14. Der an beiden Enden eingespannt gelagerte Stab mit 3 Zwischen-Stützstellen.

erhaltung der Durchbiegung $(y)_{x=x_0} = f$ Stützkräfte $Q<0$ erforderlich, wie es in Abb. 13c angedeutet ist. Wie sich noch zeigen wird, kann diese Stabform noch für anders angeordnete Stützkräfte existieren.

Im Ablauf des Durchschlagvorganges zeigt sich der bisher einzige Unterschied gegenüber dem Stab mit beiderseits gelenkig gelagerten Enden. Da der beiderseits eingespannte Stab nach dem Durchschlagen nicht als aus drei Teilstäben vom gleichen Typ bestehend aufgefaßt werden kann, ist anzunehmen, daß sich weitere Unterschiede im Verhalten zeigen, wenn unter Zugrundelegung der Stabform und -belastung nach Abb. 14 die Untersuchung noch ein Stück weitergeführt wird.

Für diesen Fall werden die Biegungsmomente im Stab

$$M_1 = P y_1 - Q x_1 - M_0,$$
$$M_2 = P y_2 - Q x_2 + Q_0 (x_2 - x_0) - M_0$$

und die allgemeinen Lösungen von (1) lauten

$$y_1 = A_1 \sin \alpha x + B_1 \cos \alpha x + \frac{Q}{P\alpha} \alpha x + \frac{M_0}{P},$$

$$y_2 = A_2 \sin \alpha x + B_2 \cos \alpha x + \frac{Q}{P\alpha} \alpha x + \frac{M_0}{P} - \frac{Q_0}{P\alpha} \alpha (x - x_0).$$

Daraus wird mit den Grenzbedingungen für die Stabquerschnitte an den Stellen $x = 0$, $x = x_0$ und $x = l/2$ nach Elimination von A_1, B_1, A_2, B_2, das folgende Gleichungssystem gewonnen:

$$0 = -f + \frac{Q}{P\alpha}(\alpha x_0 - \sin \alpha x_0) \qquad + \qquad * \qquad + \frac{M_0}{P}(1 - \cos \alpha x_0),$$

$$0 = -f + \frac{Q}{P\alpha}\left\{\alpha x_0 + \operatorname{tg}\left[\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)\right]\right\} - \frac{Q_0}{P\alpha} \operatorname{tg}\left[\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)\right] \qquad + \frac{M_0}{P},$$

$$0 = \quad * + \frac{Q}{P\alpha}(1 - \cos \alpha x_0) \qquad + \qquad * \qquad + \frac{M_0}{P} \sin \alpha x_0,$$

$$0 = \quad f + \frac{Q}{P\alpha}\left\{\frac{\alpha l}{2} - \operatorname{tg}\left[\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)\right]\right\} + \frac{Q_0}{P\alpha}\left\{\operatorname{tg}\left[\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)\right] - \alpha\left(\frac{l}{2} - x_0\right)\right\} + \frac{M_0}{P}.$$

Dieses System kann nur befriedigt werden, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet. Das ist der Fall entweder für

$$\text{c)} \quad \frac{\alpha x_0}{2} = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

oder

$$\text{d)} \quad \frac{\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left[\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)\right]} = 2 \frac{\frac{\alpha x_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha x_0}{2}} - 1.$$

Die Bedeutung dieser beiden Lösungen wird nachfolgend näher untersucht.

c) $\frac{\alpha x_0}{2} = n\pi$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$. Mit $n = 1$ folgen aus dem Gleichungssystem die bereits bekannte Beziehung (10) und die Ausdrücke

$$\frac{Q_0 l^2}{32 EJf} = \frac{\left(\frac{\alpha l}{4}\right)^3}{\pi} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{4} - \frac{\alpha l}{4} - \pi}{\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{4} - \frac{\alpha l}{4} + \pi}, \tag{14}$$

$$\frac{M_0 l^2}{16 EJf} = -\frac{\left(\frac{\alpha l}{4}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{4} - \frac{\alpha l}{4} + \pi}. \tag{15}$$

Für die Durchbiegung des Stabes ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f\left[\frac{1}{2\pi}(\alpha x - \sin\alpha x) - \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4} - \frac{\alpha l}{4} + \pi}(1 - \cos\alpha x)\right], \\ y_2 &= \frac{f}{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4} - \frac{\alpha l}{4} + \pi}\left[\alpha x - \sin\alpha x + \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4}\cos\alpha x - \left(\frac{\alpha l}{4} + \pi\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die untere Grenze des Gültigkeitsbereiches der vorstehenden Formeln ist gegeben durch das Verschwinden einer der Stützkräfte Q_0 oder Q_1. Es wird nach (14) $Q_0 = 0$ für $\alpha l/4 = 1{,}46\,\pi$ und nach (10) und (14) $Q_1 = Q_0 - Q = 0$ für $\alpha l/4 = 3\pi/2$. Mithin ist die untere Grenze des Gültigkeitsbereiches gegeben durch $\alpha l/4 = 3\pi/2$.

Die obere Grenze des Gültigkeitsbereiches wird erreicht, wenn die Stabkrümmung an einer der Anlagestellen verschwindet. Das ist der Fall für $\alpha l/4 = 2\pi$. Dort ist nämlich, wie sich nach (16) leicht nachprüfen läßt, $(y_1'')_{x=x_0} = (y_2'')_{x=x_0} = (y_2'')_{x=l/2} = 0$. Die beiden Stabformen für $\alpha l/4 = 3\pi/2$ (untere Grenze) und $\alpha l/4 = 2\pi$ (obere Grenze) sind in Abb. 15a und 15b dargestellt. Die Stütz- und Auflagerkräfte betragen hierbei

$$\text{für } \frac{\alpha l}{4} = \frac{3\pi}{2}: \quad \frac{Q_0 l^3}{32\,EJf} = \frac{Q l^3}{32\,EJf} = \pi^2, \qquad Q_1 = 0, \qquad M_0 = -Pf,$$

$$\text{für } \frac{\alpha l}{4} = 2\pi: \quad \frac{Q_0 l^3}{32\,EJf} = 24\,\pi^2, \quad \frac{Q l^3}{32\,EJf} = 8\,\pi^2, \quad \frac{Q_1 l^3}{32\,EJf} = 16\,\pi^2, \quad M_0 = 0.$$

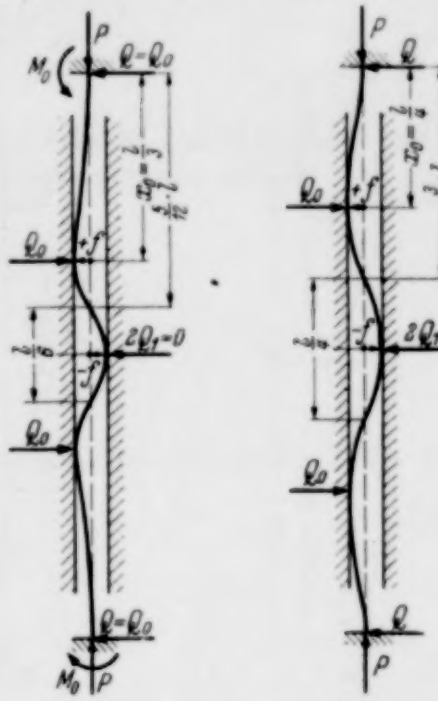

Abb. 15a. Abb. 15b.
Stabformen nach Bedingung c)
für $\frac{\alpha l}{4} = \frac{3\pi}{2}$, für $\frac{\alpha l}{4} = 2\pi$.

Wird die Stablast soweit gesteigert, daß $\alpha l/4 > 2\pi$ wird, so bilden sich sowohl für die äußeren Stabteile von der Länge $3/8 \cdot l$, als auch für den mittleren Stabteil von der Länge $l/4$, ungekrümmte, an den Stützflächen anliegende Stabbereiche aus, deren Länge mit wachsender Stablast zunimmt.

d) $$\frac{\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left[\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)\right]} = 2\frac{\frac{\alpha x_0}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2}} - 1.$$

Mit dieser Bedingung ergibt sich aus dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{P\alpha} &= -f\frac{1}{2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2} - \frac{\alpha x_0}{2}\right)} = -A_1, & \frac{M_0}{P} &= f\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2}}{2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2} - \frac{x_0}{2}\right)} = -B_1, \\ \frac{Q_0}{P\alpha} &= \frac{f}{2\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)}\left(1 - \frac{\frac{\alpha l}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2} - \frac{\alpha x_0}{2}}\right), & \frac{Q_1}{P\alpha} &= \frac{f}{2\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)}\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2} - 2\frac{\alpha x_0}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2} - \frac{\alpha x_0}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die Biegelinie des verformten Stabes verläuft nach den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{f}{2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2} - \frac{\alpha x_0}{2}\right)}\left[\sin\alpha x - \alpha x + \operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2}(1 - \cos\alpha x)\right], \\ y_2 &= \frac{f\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2} - 2\frac{\alpha x_0}{2}\right)}{2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha x_0}{2} - \frac{\alpha x_0}{2}\right)\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)}\left\{\alpha\left(\frac{l}{4} + \frac{x_0}{2} - x\right) - \frac{\sin\left[\alpha\left(\frac{l}{4} + \frac{x_0}{2} - x\right)\right]}{\cos\left[\alpha\left(\frac{l}{4} - \frac{x_0}{2}\right)\right]}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die untere Grenze des Gültigkeitsbereiches ergibt sich aus $Q_0 = 0$ zu $\alpha l/4 = \pi$. Die Krümmungen des Stabes an allen Anlagestellen verschwinden bei der gleichen Stablast. Hieraus ergibt sich die obere Grenze des Gültigkeitsbereiches zu $\alpha l/4 = 2\pi$.

Die Stabformen für $\alpha l/4 = \pi$ (untere Grenze) und $\pi l/4 = 2\pi$ (obere Grenze) sind in Abb. 16a und 16b dargestellt. Die zugehörigen Stütz- und Auflagerkräfte betragen

$$\text{für } \frac{\alpha l}{4} = \pi: \quad Q_0 = 0\,, \qquad \frac{Q_1}{P\alpha} = \frac{f}{2\pi}\,, \qquad \frac{Q}{P\alpha} = -\frac{f}{2\pi}\,, \qquad \frac{M_0}{P} = \frac{f}{2\pi} \cdot 1{,}43\,\pi\,,$$

$$\text{für } \frac{\alpha l}{4} = 2\pi: \frac{Q_0}{P\alpha} = \frac{3f}{2\pi}\,, \qquad \frac{Q_1}{P\alpha} = \frac{f}{\pi}\,, \qquad \frac{Q}{P\alpha} = \frac{f}{2\pi}\,, \qquad M_0 = 0\,.$$

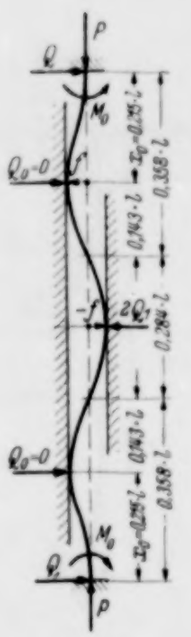

Abb. 16a.

Abb. 16b.

Stabformen nach Bedingung d)
für $\frac{\alpha l}{4} = \pi$, für $\frac{\alpha l}{4} = 2\pi$.

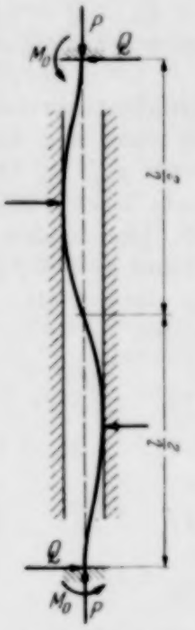

Abb. 17. Eine weitere, mögliche Stabform
für $\frac{\alpha l}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}43\,\pi$.

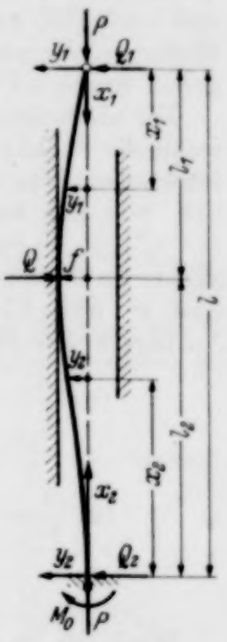

Abb. 18. Der an einem Ende gelenkig, am anderen Ende eingespannt gelagerte Stab. Stabform für $1{,}43\,\pi \leqq \alpha l \leqq 3\pi$.

Zu den Bedingungen c) und d) gehört die gleiche obere Grenze der beiden Gültigkeitsbereiche. Für diese Grenzbelastung $\alpha l/4 = 2\pi$ stimmen sowohl die Stabform als auch die Stütz- und Auflagerkräfte nach den Bedingungen c) und d) überein.

Neben den hier behandelten Stabformen ist noch die nach Abb. 17 möglich. Zu ihrer Aufrechterhaltung gehört wenigstens eine Stabkraft, die dem Wert $\alpha l/4 = 1/2 \cdot 1{,}43\pi$ entspricht. Der Stab kann aus 2 Teilstäben zusammengesetzt aufgefaßt werden, die an einem Ende gelenkig, am anderen Ende eingespannt gelagert sind. Auf die Untersuchung dieser Stabform kann hier verzichtet werden, weil sie gegenüber der im nächsten Abschnitt durchgeführten Behandlung des an einem Ende gelenkig, am anderen Ende eingespannt gelagerten Stabes nichts Neues bringt.

4. Der an einem Ende gelenkig, am anderen Ende eingespannt gelagerte Stab. Hierfür ergeben sich mit den Bezeichnungen der Abb. 18 die Biegungsmomente in den beiden Stabteilen zu

$$M_1 = Py_1 - Q_1 x_1,$$
$$M_2 = Py_2 - Q_2 x_2 - M_0.$$

Damit lauten die allgemeinen Lösungen von (1)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin \alpha x_1 + B_1 \cos \alpha x_1 + \frac{Q_1}{P} x_1\,, \\ y_2 &= A_2 \sin \alpha x_2 + B_2 \cos \alpha x_2 + \frac{Q_2}{P} x_2 + \frac{M_0}{P} \end{aligned}\right| \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Mit Hilfe der Grenzbedingungen für die elastische Linie, die in diesem Fall auch die Gleichheit der Biegungsmomente für die beiden Stabteile an der Anlagestelle enthalten, ergeben sich nach Elimination aller übrigen Größen die beiden homogenen Gleichungen mit Q_1 und Q_2

$$\left.\begin{aligned} Q_1\,(\operatorname{tg}\alpha l_1 - \alpha l_1) - 2\,Q_2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l_2}{2} - \frac{\alpha l_2}{2}\right) &= 0\,, \\ Q_1\,\alpha l_1 \qquad\qquad + Q_2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l_2}{2} - 2\,\frac{\alpha l_2}{2}\right) &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Diese Gleichungen können nur dann eine von der trivialen Nullösung verschiedene Lösung haben, wenn die sich aus dem Verschwinden der Koeffizientendeterminante ergebende Bedingung

$$\frac{\alpha l_1}{\operatorname{tg}\alpha l_1} = 2\,\frac{\frac{\alpha l_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha l_2}{2}} - 1 \tag{20}$$

erfüllt wird. Mit Hilfe von (20) lassen sich bei gegebenem α und l die Teilstablängen l_1 und l_2 bestimmen. Die Integrationskonstanten, Stütz- und Auflagerkräfte ergeben sich zu

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{f/\cos\alpha l_1}{\operatorname{tg}\alpha l_1 - \alpha l_1}\,, \qquad B_1 = 0\,, \qquad \frac{Q_1}{P\alpha} = -\frac{f}{\operatorname{tg}\alpha l_1 - \alpha l_1}\,, \\ \frac{Q_2}{P\alpha} &= -\frac{f}{2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l_2}{2} - \frac{\alpha l_2}{2}\right)} = -A_2\,, \qquad \frac{M_0}{P} = \frac{f\operatorname{tg}\frac{\alpha l_2}{2}}{2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l_2}{2} - \frac{\alpha l_2}{2}\right)} = -B_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die untere Grenze des Gültigkeitsbereiches für die Stabform nach Abb. 18 ist durch die Bedingung $Q = Q_1 + Q_2 = 0$ gegeben. Damit wird aus (19)

$$\alpha l_1 - \operatorname{tg}\alpha l_1 = 2\pi\,, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha l_2}{2} - \frac{\alpha l_2}{2} = \pi$$

mit den kleinsten Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} \alpha l_1 &= 0{,}57\,\pi\,, \\ \alpha l_2 &= 0{,}86\,\pi\,, \end{aligned}\right\} \quad \alpha l = 1{,}43\,\pi\,. \tag{22}$$

Dieser Wert entspricht der Knickbedingung eines an einem Ende gelenkig, am anderen Ende eingespannt gelagerten Stabes von der Länge l.

Die obere Grenze des Gültigkeitsbereiches der in Abb. 18 dargestellten Stabform ergibt sich aus dem Verschwinden der Stabkrümmung an der Anlagestelle. Das liefert für die beiden Stabteile

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha l_1}{\operatorname{tg}\alpha l_1 - \alpha l_1} = 0\,, \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha l_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha l_2}{2} - \frac{\alpha l_2}{2}} = 0$$

mit den kleinsten Wurzeln,

$$\left.\begin{aligned} \alpha l_1 &= \pi\,, \\ \alpha l_2 &= 2\,\pi\,, \end{aligned}\right\} \quad \alpha l = 3\,\pi\,. \tag{23}$$

Die Abb. 19a und 19b zeigen die Stabform an der unteren ($\alpha l = 1{,}43\,\pi$) und oberen Grenze ($\alpha l = 3\,\pi$) des Gültigkeitsbereiches. Die Stütz- und Auflagerkräfte betragen

für $\alpha l = 1{,}43\,\pi$: $\dfrac{Q_1 l^3}{1{,}43^3\,E\,J\,f} = \dfrac{\pi^2}{2}$, $\dfrac{Q_2 l^3}{1{,}43^3\,E\,J\,f} = -\dfrac{\pi^2}{2}$, $\dfrac{Q\,l^3}{1{,}43^3\,E\,J\,f} = 0$,

$\dfrac{M_0 l^2}{1{,}43^3\,E\,J\,f} = \dfrac{\pi^2}{2}$

für $\alpha l = 3\,\pi$: $\dfrac{Q_1 l^3}{27\,E\,J\,f} = \pi^2$, $\dfrac{Q_2 l^3}{27\,E\,J\,f} = \dfrac{1}{2}\pi^2$, $\dfrac{Q\,l^3}{27\,E\,J\,f} = \dfrac{3}{2}\pi^2$, $M_0 = 0$.

Für Stabbelastungen $\alpha l > 3\,\pi$ werden mit den Bezeichnungen der Abb. 20 die Biegungsmomente in den vier Stababschnitten

$$M_1 = P\,y_1 - Q_1\,x_1\,, \qquad \overline{M}_1 = P\,\bar{y}_1 - Q_1\,\bar{x}_1 + \lambda_1\,Q\,(\bar{x}_1 - x_{10}),$$

$$M_2 = P\,y_2 - Q_2\,x_2 - M_0\,, \qquad \overline{M}_2 = P\,\bar{y}_2 - Q_2\,\bar{x}_2 + \lambda_2\,Q\,(\bar{x}_2 - x_{20}) - M_0\,,$$

und damit die allgemeinen Lösungen von (1):

$$y_1 = A_1 \sin \alpha x_1 + B_1 \cos \alpha x_1 + \frac{Q_1}{P} x_1 ,$$

$$\bar{y}_1 = \bar{A}_1 \sin \alpha \bar{x}_1 + \bar{B}_1 \cos \alpha \bar{x}_1 + \frac{Q_1}{P} \bar{x}_1 - \frac{\lambda_1 Q}{P} (\bar{x}_1 - x_{10}),$$

$$y_2 = A_2 \sin \alpha x_2 + B_2 \cos \alpha x_2 + \frac{Q_2}{P} x_2 + \frac{M_0}{P} ,$$

$$\bar{y}_2 = \bar{A}_2 \sin \alpha \bar{x}_2 + \bar{B}_2 \cos \alpha \bar{x}_2 + \frac{Q_2}{P} \bar{x}_2 + \frac{M_0}{P} - \frac{\lambda_2 Q}{P} (\bar{x}_2 - x_{20}) .$$

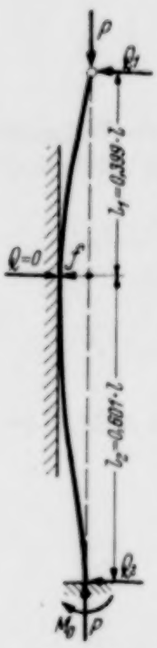

Abb. 19a.
Stabformen für $\alpha l = 1{,}43\pi$, für $\alpha l = 3\pi$.

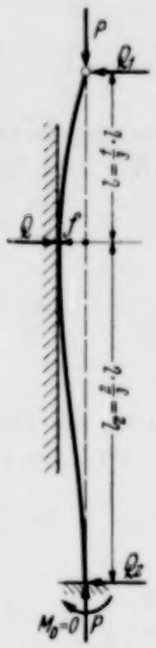

Abb. 19b.

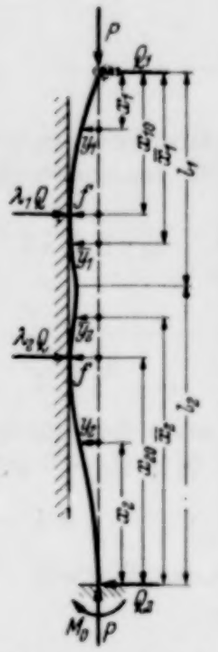

Abb. 20. Mögliche Stabverformung für $\alpha l > 3\pi$.

Mit den Grenzbedingungen $\bar{y}_1' = 0$ für $\bar{x}_1 = x_{10}$, $\bar{y}_1' = 0$ für $\bar{x}_1 = l_1$, $\bar{y}_2' = 0$ für $\bar{x}_2 = x_{20}$ und $\bar{y}_2' = 0$ für $\bar{x}_2 = l_2$ ergeben sich daraus die Gleichungen

$$\bar{A}_1 \alpha \cos \alpha x_{10} - \bar{B}_1 \alpha \sin \alpha x_{10} = \frac{\lambda_1 Q}{P} - \frac{Q_1}{P} ,$$

$$\bar{A}_1 \alpha \cos \alpha l_1 - \bar{B}_1 \alpha \sin \alpha l_1 = \frac{\lambda_1 Q}{P} - \frac{Q_1}{P} ,$$

und

$$\bar{A}_2 \alpha \cos \alpha x_{20} - \bar{B}_2 \alpha \sin \alpha x_{20} = \frac{\lambda_2 Q}{P} - \frac{Q_2}{P} ,$$

$$\bar{A}_2 \alpha \cos \alpha l_2 - \bar{B}_2 \alpha \sin \alpha l_2 = \frac{\lambda_2 Q}{P} - \frac{Q_2}{P} .$$

Wegen $\lambda_1 Q + \lambda_2 Q = Q_1 + Q_2$ können diese Gleichungen nur dann befriedigt werden, wenn eine der beiden Doppelbedingungen

$$\text{a)} \begin{Bmatrix} \lambda_1 Q - Q_1 = 0 , \\ \lambda_2 Q - Q_2 = 0 , \end{Bmatrix} \text{ und } \begin{Bmatrix} \bar{A}_1 = \bar{B}_1 = 0 \\ \bar{A}_2 = \bar{B}_2 = 0 \end{Bmatrix},$$

$$\text{b)} \begin{Bmatrix} \lambda_1 Q - Q_1 = 0 , \\ \lambda_2 Q - Q_2 = 0 \end{Bmatrix} \text{ und } \begin{Bmatrix} \alpha(l_1 - x_{10}) = n\pi \ (n = 1, 2, 3 \ldots) \\ \alpha(l_2 - x_{20}) = n\pi \ (n = 1, 2, 3 \ldots) \end{Bmatrix}$$

erfüllt ist. Die Bedeutung dieser beiden Lösungen wird nachfolgend untersucht.

a) $\begin{Bmatrix} \lambda_1 Q - Q_1 = 0 \\ \lambda_2 Q - Q_2 = 0 \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} \bar{A}_1 = \bar{B}_1 = 0 \\ \bar{A}_2 = \bar{B}_2 = 0 \end{Bmatrix}$. Mit dieser Bedingung ergeben sich aus

dem mit Hilfe der noch nicht benutzten Grenzbedingungen gewonnenen, aber hier nicht aufgeführten Gleichungssystem die Beziehungen

$$\alpha\, x_{10} = \pi, \quad f = \frac{Q_1}{P}\, x_{10}, \quad Q_1 = \frac{f}{\pi}\,\alpha^3\, E\, J, \quad A_1 = \frac{f}{\pi}, \quad B_1 = 0,$$

$$\alpha\, x_{20} = 2\,\pi, \quad f = \frac{Q_2}{P}\, x_{20}, \quad Q_2 = \frac{f}{2\,\pi}\,\alpha^3\, E\, J, \quad A_2 = -\frac{f}{2\,\pi}, \quad B_2 = M_0 = 0.$$

Die Gleichungen der elastischen Linie lauten im Bereich $0 \leq x_1 \leq l_1$

$$y_1 = \frac{f}{\pi}\,(\sin \alpha x_1 + \alpha x_1) \quad \text{und} \quad \bar{y}_1 = f$$

im Bereich $0 \leq x_2 \leq l_2$

$$y_2 = \frac{f}{2\,\pi}\,(-\sin \alpha x_2 + \alpha x_2) \quad \text{und} \quad \bar{y}_2 = f.$$

b) $\left.\begin{matrix}\lambda_1 Q - Q_1 = 0\\ \lambda_2 Q - Q_2 = 0\end{matrix}\right\}$ und $\left.\begin{matrix}\alpha(l_1 - x_{10}) = \pi\\ \alpha(l_2 - x_{20}) = \pi\end{matrix}\right\}$

Diese Bedingung ist gleich für den Fall $n = 1$ angeschrieben. Hiermit ergeben sich auf die gleiche

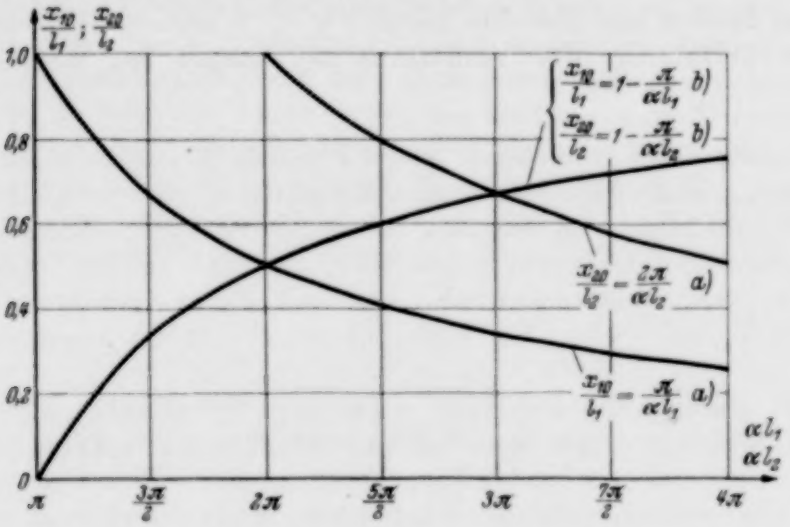

Abb. 21. $\frac{x_{10}}{l_1}$ und $\frac{x_{20}}{l_2}$ in Abhängigkeit von $\alpha\, l_1$ und $\alpha\, l_2$ nach den Bedingungen a) und b).

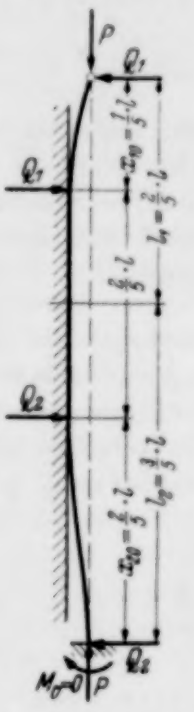

Abb. 22. Stabform nach Bedingung a) für $\alpha l = 3\pi$.

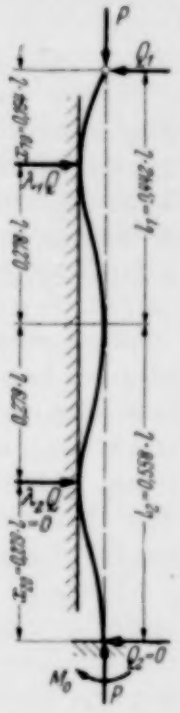

Abb. 23. Stabform nach Bedingung b) für $\alpha l = 3{,}587\,\pi$.

Weise wie bei a) ermittelt, für den Verlauf der Biegelinie die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{f}{\operatorname{tg} \alpha x_{10} - \alpha x_{10}} \left(\frac{\sin \alpha x_1}{\cos \alpha x_{10}} - \alpha\, x_1 \right) \\ \bar{y}_1 &= \frac{f}{\operatorname{tg} \alpha x_{10} - \alpha x_{10}} \left\{ \operatorname{tg} \alpha x_{10} \cos\left[\alpha(\bar{x}_1 - x_{10})\right] - \alpha x_{10} \right\}, \end{aligned}\right\} \text{ im Bereich } 0 \leq x_1 \leq l_1,$$

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \frac{f}{2\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha x_{20}}{2} - \frac{\alpha x_{20}}{2}\right)} \left[\sin \alpha x_2 + \operatorname{tg} \frac{\alpha\, x_{20}}{2} (1 - \cos \alpha x_2) - \alpha x_2 \right] \\ \bar{y}_2 &= \frac{f}{2\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha x_{20}}{2} - \frac{\alpha x_{20}}{2}\right)} \left\{ \operatorname{tg} \frac{\alpha x_{20}}{2} \left[1 + \cos\left[\alpha\,(\bar{x}_2 - x_{20})\right]\right] - \alpha x_{20} \right\} \end{aligned}\right\} \text{ im Bereich } 0 \leq x_2 \leq l_2.$$

Für den Zusammenhang zwischen x_{10} und x_{20} gilt die Gleichung

$$\frac{\alpha x_{10}}{\operatorname{tg} \alpha x_{10}} = 2\, \frac{\frac{\alpha x_{20}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha x_{20}}{2}} - 1. \tag{24}$$

Zur Ermittlung der Grenzen, zwischen denen die Bedingungen a) und b) gültig sind, sind in Abb. 21 die Verhältnisse x_{10}/l_1 bzw. x_{20}/l_2 in Abhängigkeit von $\alpha\, l_1$ bzw. $\alpha\, l_2$, wie sie sich entsprechend den Bedingungen a) und b) ergeben, dargestellt.

Die untere Grenze der Bedingung a) ist gegeben durch (23). Der Stab hat dabei die in Abb. 19b dargestellte Form. Die obere Grenze für die Bedingung a) beträgt

$$\left.\begin{aligned} \alpha\, l_1 &= 2\,\pi\,, \\ \alpha\, l_2 &= 3\,\pi\,, \end{aligned}\right\} \quad \alpha\, l = 5\,\pi\,.$$

Die hierzu gehörige Stabform zeigt Abb. 22. Die Stütz- und Auflagerkräfte sind dabei

$$Q_1 = \frac{f}{(l/5)^3}\,\pi^2\,E\,J\,, \qquad Q_2 = \frac{f}{(l/5)^3}\,\frac{\pi^2}{2}\,E\,J\,, \qquad M_0 = 0\,.$$

In diesem Zustand entspricht die Stablast der *Euler*schen Knicklast eines beiderseits eingespannten Stabes von der Länge $2 \cdot l/5$. Der mittlere Stabteil schlägt durch. Dieser Vorgang wird in seinem Ablauf durch die Bedingung b) bestimmt, deren obere Grenze mit der der Bedingung a) übereinstimmt. Die untere Grenze für die Bedingung b) ergibt sich aus $\lambda_2 Q = 0$ zu $\alpha\, l = 3{,}587\,\pi$. Die zugehörige Stabform zeigt Abb. 23. Die Stütz- und Auflagerkräfte betragen hierfür

$$Q_1 = \frac{f}{2}\,\frac{(3{,}587\,\pi)^2}{0{,}164\,l^3}\,E\,J = \lambda_1\,Q\,, \qquad Q_2 = 0 = \lambda_2\,Q\,, \qquad M_0 = \frac{f}{2}\,\frac{(3{,}587\,\pi)^2}{l^2}\,E\,J\,.$$

Für $\alpha\, l < 3{,}587\,\pi$ wird entweder $\lambda_2 Q < 0$ oder an der Stelle $\bar{x}_1 = l_1$ greift eine weitere Stützkraft an, damit das Gleichgewicht der äußeren Kräfte am Stab gewährleistet ist. Da negative Stützkräfte oder auch positive Stützkräfte an Stellen mit Durchbiegungen $y < |f|$ ohne praktische Bedeutung sind, wird von einer Weiterverfolgung des Verhaltens des Stabes bei Werten $\alpha\, l < 3{,}587\,\pi$ abgesehen.

5. Zusammenfassung. Die Untersuchung des durch ebene, starre Flächen in seiner Durchbiegung begrenzten geraden Knickstabes mit Hilfe der elementaren Biegetheorie führt auf eine interessante Durchschlagerscheinung. Unabhängig von der Art der Lagerung der Stabenden stützt sich nach Überschreitung der zugehörigen *Euler*schen Knicklast der Stab an der Stelle seiner größten Durchbiegung gegen eine der Stützflächen ab. Die sich dabei ausbildende Stützkraft wächst mit zunehmender Stablast an, während sich gleichzeitig die Stabkrümmung an der Anlagestelle verringert.

Erreicht die Stabkrümmung an der Anlagestelle die Krümmung der Stützfläche, dann bildet sich bei weiterer Steigerung der Stablast ein an der Stützfläche anliegendes, ungekrümmtes und daher momentenfreies Stabstück aus, an dessen Enden Einzelkräfte von der Stützfläche auf den Stab übertragen werden. Die Länge dieses Stabteiles wächst mit der Stablast solange an, bis diese die Größe der *Euler*schen Knicklast des als an beiden Enden eingespannt anzusehenden geraden Stabteiles erreicht. Der nun einsetzende Knickvorgang des bis dahin an der Stützfläche anliegenden Stabteiles kann wegen der zunehmenden Knicklänge mit sich verringernder Stablast aufrecht erhalten werden. Bei unveränderter Stablast schlägt daher der mittlere Stabteil durch und kommt an der gegenüberliegenden Stützfläche zur Anlage.

Bei weiterer Steigerung der Stablast kann der Stab immer als aus Teilstäben zusammengesetzt aufgefaßt werden, deren Lagerung den hier untersuchten drei Grundfällen entspricht. Es ist daher nicht zu erwarten, daß eine Weiterführung der Untersuchung noch zu grundsätzlich neuen Erkenntnissen führt.

(Eingegangen am 6. Oktober 1953.)

Anschrift des Verfassers: *Heinz Link*, Oberhausen (Rheinland), Goebenstr. 153.

Zur Analyse der Dämpfung freier Schwingungen.

Von H. Kauderer.

1. Einleitung. Bei mechanischen Schwingungen fester Körper setzt sich die gesamte Dämpfung meistens aus mehreren, durch verschiedene physikalische Vorgänge hervorgerufenen Kraftwirkungen zusammen, die an dem schwingenden System gleichzeitig angreifen. Die wichtigsten hiervon sind bekanntlich die ihrem Betrag nach als konstant angenommene Kraft der trockenen Reibung, die der Geschwindigkeit proportionale sog. Flüssigkeitsdämpfung und die bei Schwingungen in gasförmigen Medien auftretende, dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionale sog. Luftdämpfung. Es besteht nun bei technisch ausgeführten Schwingern häufig der Wunsch, aus dem (etwa durch ein Oszillogramm aufgenommenen) Ablauf des freien Schwingungsvorgangs zu erschließen, welcher Teilbetrag an der gesamten Dämpfungskraft auf jede der einzelnen Kraftwirkungen entfällt, d.h. also mit Hilfe des Bewegungsablaufs den ganzen Komplex der dämpfenden Kräfte zu analysieren. Zur Lösung dieses Problems hat *G. Plato*[1] eine Formel entwickelt, welche in allgemeiner Gestalt die Dämpfung als Funktion der Geschwindigkeit mit Hilfe eines uneigentlichen Integrals näherungsweise wiedergibt. Da jedoch die numerische Auswertung von Versuchsergebnissen mit Hilfe dieser Formel schwierig ist, soll hier die Aufgabe erneut angegriffen und auf einem anderen, in den meisten praktischen Fällen bequem begehbaren Weg behandelt werden.

Wir beschränken uns auf einen einfachen freien Schwinger mit gerader Kennlinie, von dem wir voraussetzen, daß sein Ausschlag $q(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{q} + \omega^2 q + \varepsilon g(\dot{q}) = 0 \tag{1}$$

mit der Konstanten ω genüge. Das „Dämpfungsglied" $\varepsilon g(\dot{q})$ bestehe aus der dimensionslosen, gegen Eins kleinen Größe ε (d. h. wir setzen eine „schwache" Dämpfung voraus) und einer allein von der Geschwindigkeit $\dot{q}$ abhängigen Funktion $g(\dot{q})$, die sich durch eine Reihe von der Form

$$g(\dot{q}) \equiv c_0 \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} + c_1 \dot{q} + c_2 |\dot{q}| \dot{q} + c_3 |\dot{q}|^2 \dot{q} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu |\dot{q}|^{\nu-1} \dot{q} \tag{2}$$

mit noch unbekannten Koeffizienten c_ν darstellen lasse. Wir wollen zeigen, wie man aus der Folge der Amplituden eines Schwingungsvorgangs und aus seiner Kreisfrequenz die Koeffizienten $C_\nu = \varepsilon c_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2 \ldots$) näherungsweise ermitteln und somit die Dämpfungskraft analysieren kann.

Um dieses Ziel zu verfolgen, leiten wir zunächst (Ziff. 2) mit Hilfe eines dem Verfahren von *N. Kryloff* und *N. Bogoljuboff*[2] zugrundeliegenden Ansatzes die Grundgleichung her, die im Sinn einer Näherung erster Ordnung für schwache Dämpfung einen Zusammenhang herstellt zwischen den Dämpfungskoeffizienten c_ν und den Werten benachbarter Amplituden. (Eine exakte Untersuchung dieses Zusammenhangs ist bekanntlich nur in einigen Sonderfällen möglich.) Aus der Grundgleichung wird (Ziff. 3) eine Methode zur Berechnung der Dämpfungskoeffizienten entwickelt, die auch noch auf den Fall erweitert wird, daß man nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Amplituden, sondern nur etwa jede m-te gemessen hat. An einem Zahlenbeispiel (Ziff. 4) wird das Verfahren erläutert. Schließlich zeigen wir noch (Ziff. 5), wie man direkt aus den gemessenen Amplitudenwerten eines Schwingungsvorgangs ohne Rechenaufwand ein näherungsweise richtiges Diagramm für den Verlauf der Dämpfungskraft als Funktion der Geschwindigkeit gewinnen kann.

2. Die Herleitung der Grundgleichung. Wir betrachten zunächst den Bewegungsvorgang während einer einzigen, zwischen den maximalen positiven Ausschlägen q_k und q_{k+1} verlaufenden Schwingungsperiode, die, von einer beliebigen Periode an gezählt, als k-te bezeichnet sei.

---

[1] *G. Plato*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947), S. 93.

[2] *N. Kryloff* und *N. Bogoljuboff*, Introduction to non-linear mechanics, S. 8, Princeton 1947.

Für diese setzen wir den Ausschlag $q(t)$ mit der Konstanten

$$A_k = \frac{1}{2}(q_k + q_{k+1}) \tag{3}$$

und den noch unbekannten Funktionen $Q_k(t)$ und $\varphi_k(t)$ in der Gestalt

$$q(t) = [A_k + \varepsilon Q_k(t)] \cos[\omega t + \varepsilon \varphi_k(t)] \tag{4}$$

an, wobei wir zugleich zum Ausdruck bringen, daß sich die zu erwartende Schwingungsform wegen der (infolge des Faktors ε) geringen Dämpfung auch nur wenig von derjenigen freien Schwingung $q(t) = A_k \cos \omega t$ unterscheiden soll, deren Amplitude gleich dem Mittelwert aus Anfangs- und Endamplitude der k-ten Periode der gedämpften Schwingung ist.

Da wir zwei willkürliche Funktionen Q_k und φ_k gewählt haben, so dürfen wir für diese außer der Forderung, daß der Ansatz (4) die Bewegungsgleichung (1) befriedigen muß, noch eine zweite stellen. Sie bestehe darin, daß wir auch noch vorschreiben, wie sich die Geschwindigkeit $\dot{q}(t)$ darstellen lassen soll. Wir verlangen nämlich, daß

$$\dot{q}(t) = -\omega[A_k + \varepsilon Q_k(t)] \sin[\omega t + \varepsilon \varphi_k(t)] \tag{5}$$

werde, wobei wir also wiederum eine nur geringe Abweichung vom Geschwindigkeitsverlauf der ungedämpften Schwingung voraussetzen.

Wir können nun aber auch andererseits aus (4) durch Ableitung nach der Zeit einen Ausdruck für $\dot{q}(t)$ gewinnen. Der Vergleich mit (5) wird dann eine Beziehung liefern, die zwischen den Funktionen Q_k und φ_k (bzw. ihren Ableitungen) bestehen muß. Wir vernachlässigen hierbei sämtliche Glieder, die in ε von höherer als der ersten Ordnung klein sind, gehen also nicht direkt von (4), sondern von einem Ansatz aus, der sich aus (4) ergibt, wenn man die rechte Seite nach Potenzen von ε entwickelt und sich dabei auf die in ε linearen Glieder beschränkt. Dieser Ansatz wird

$$q(t) = A_k \cos \omega t + \varepsilon [Q_k(t) \cos \omega t - A_k \varphi_k(t) \sin \omega t]. \tag{6}$$

Leitet man ihn nach der Zeit ab, so ergibt sich

$$\dot{q}(t) = -A_k \omega \sin \omega t + \varepsilon (\dot{Q}_k \cos \omega t - \omega Q_k \sin \omega t - A_k \dot{\varphi}_k \sin \omega t - A_k \omega \varphi_k \cos \omega t). \tag{7}$$

Um diese Darstellung mit (5) vergleichen zu können, müssen wir auch (5) in ε linearisieren. Wir erhalten so

$$\dot{q}(t) = -A_k \omega \sin \omega t - \varepsilon \omega (Q_k \sin \omega t + A_k \varphi_k \cos \omega t). \tag{8}$$

Damit sich nun die Gleichungen (7) und (8) in Einklang bringen lassen, ist zu verlangen, daß zwischen $\dot{Q}_k(t)$ und $\dot{\varphi}_k(t)$ die Beziehung

$$\dot{Q}_k(t) \cos \omega t - A_k \dot{\varphi}_k(t) \sin \omega t = 0 \tag{9}$$

besteht, die für die in ε linearisierte Theorie der Forderung, daß $\dot{q}(t)$ die Form (5) annehmen soll, gleichwertig ist.

Mit der aus (8) gebildeten zweiten Ableitung

$$\ddot{q}(t) = -A_k \omega^2 \cos \omega t - \varepsilon \omega (\dot{Q}_k \sin \omega t + \omega Q_k \cos \omega t + A_k \dot{\varphi}_k \cos \omega t - A_k \omega \varphi_k \sin \omega t)$$

und mit $q(t)$ aus (6) geht jetzt die Bewegungsgleichung (1) über in

$$\dot{Q}_k \sin \omega t + A_k \dot{\varphi}_k \cos \omega t = \frac{1}{\omega} g(\dot{q}).$$

Lassen wir — wieder im Sinn einer linearisierten Theorie — die mit $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots$ behafteten Glieder weg, die sich in $g(\dot{q})$ ergeben, wenn wir in (2) mit dem Ansatz (8) eingehen, so dürfen wir $g(\dot{q})$ durch $g(-A_k \omega \sin \omega t)$ ersetzen und erhalten die Beziehung

$$\dot{Q}_k(t) \sin \omega t + A_k \dot{\varphi}_k(t) \cos \omega t = \frac{1}{\omega} g(-A_k \omega \sin \omega t), \tag{10}$$

die zusammen mit (9) von den beiden Funktionen $Q_k(t)$ und $\varphi_k(t)$ unseres Lösungsansatzes befriedigt werden muß. Durch Multiplikation von (9) mit $\cos \omega t$ und von (10) mit $\sin \omega t$ und Addition erhalten wir

$$\dot{Q}_k(t) = \frac{1}{\omega} g(-A_k \omega \sin \omega t) \sin \omega t, \tag{11}$$

und durch Multiplikation von (9) mit $-\sin\omega t$ und von (10) mit $\cos\omega t$ und Addition ebenso

$$A_k\dot{\varphi}_k(t) = \frac{1}{\omega}\, g\,(-A_k\,\omega\sin\omega t)\cos\omega t, \tag{12}$$

wobei wir jetzt, wenn wir das Vorzeichen des Arguments von g im Bereich $0 \leqq \omega t \leqq 2\pi$ berücksichtigen, gemäß (2)

$$g(-A_k\omega\sin\omega t) = \begin{cases} -(c_0 + c_1 A_k\omega\sin\omega t + c_2 A_k^2\omega^2\sin^2\omega t + c_3 A_k^3\omega^3\sin^3\omega t + \cdots) \\ \qquad\qquad \text{für } 2\mu\frac{\pi}{\omega} \leqq t \leqq (2\mu+1)\frac{\pi}{\omega} \\ +c_0 - c_1 A_k\omega\sin\omega t + c_2 A_k^2\omega^2\sin^2\omega t - c_3 A_k^3\omega^3\sin^3\omega t + -\cdots \\ \qquad\qquad \text{für } (2\mu+1)\frac{\pi}{\omega} \leqq t \leqq 2(\mu+1)\frac{\pi}{\omega} \end{cases} \tag{13}$$

mit $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ zu setzen haben. Es werden also sowohl $\dot{Q}_k$ als auch $\dot{\varphi}_k$ periodische Funktionen von t mit der Periode $T = 2\pi/\omega$.

Jetzt ist die Länge T_k der k-ten Periode der gedämpften Schwingung zu berechnen. Werden ihr zeitlicher Anfangs- und Endpunkt mit t_k und t_{k+1} bezeichnet, so muß

$$q_k = q(t_k),\quad q_{k+1} = q(t_{k+1}) \text{ und } \dot{q}(t_k) = \dot{q}(t_{k+1}) = 0$$

werden. Aus der letzteren Forderung folgt wegen des Ansatzes (5), daß die Werte von $\omega t + \varepsilon\varphi_k(t)$ für $t = t_k$ und $t = t_{k+1}$ ganzzahlige Vielfache von 2π sein müssen, die sich um 2π unterscheiden, d. h. daß die Periodenlänge

$$T_k = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{\omega}\{2\pi - \varepsilon\,[\varphi_k(t_{k+1}) - \varphi_k(t_k)]\} = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\varepsilon}{\omega}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\varphi}_k(t)\,dt \tag{14}$$

werden muß. Setzt man den Wert von $\dot{\varphi}_k(t)$ aus (12) in das Integral ein:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\varphi}_k(t)\,dt = \frac{1}{A_k\omega}\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(-A_k\,\omega\sin\omega t)\cos\omega t\,dt = \frac{1}{A_k\omega^2}\int_{t=t_k}^{t_{k+1}} g(-A_k\omega\sin\omega t)\,d(\sin\omega t),$$

so erkennt man aus der Form von $g(-A_k\,\omega\sin\omega t)$ nach (13), daß dieses Integral verschwindet, wenn t_k und t_{k+1} zwei benachbarte Vielfache von $2\pi/\omega$ sind, so daß $T_k = 2\pi/\omega$ wird. Mit diesem Wert von T_k wird nun aber auch die Gleichung (14) befriedigt, und dies bedeutet, daß bei der hier vorausgesetzten nur von der Geschwindigkeit abhängigen und von erster Ordnung kleinen Dämpfung die Kreisfrequenz der Schwingungen den Wert ω beibehält, den sie bei fehlender Dämpfung angenommen hätte.

Wir denken uns jetzt den Beginn der Zeitmessung so gewählt, daß

$$t_k = 2k\pi/\omega,\quad t_{k+1} = 2(k+1)\pi/\omega$$

wird und berechnen für diese Werte die Differenz der beiden benachbarten Amplituden q_k und q_{k+1}. Da nach (4) wegen des Verschwindens von $\dot{q}(t_k)$ und $\dot{q}(t_{k+1})$

$$q_k - q_{k+1} = \varepsilon\,[Q_k(t_k) - Q_k(t_{k+1})] = -\varepsilon\int_{2k\pi/\omega}^{2(k+1)\pi/\omega} \dot{Q}_k(t)\,dt$$

werden muß, so ergibt sich nach (11) mit (13) für $\mu = k$

$$\begin{aligned} q_k - q_{k+1} &= -\frac{\varepsilon}{\omega}\int_{2k\pi/\omega}^{2(k+1)\pi/\omega} g\,(-A_k\,\omega\sin\omega t)\sin\omega t\,dt \\ &= +\frac{\varepsilon}{\omega}\int_{2k\pi/\omega}^{(2k+1)\pi/\omega} (c_0\sin\omega t + c_1 A_k\omega\sin^2\omega t + c_2 A_k^2\omega^2\sin^3\omega t + \cdots)\,dt - \\ &\quad -\frac{\varepsilon}{\omega}\int_{(2k+1)\pi/\omega}^{2(k+1)\pi/\omega} (c_0\sin\omega t - c_1 A_k\omega\sin^2\omega t + c_2 A_k^2\omega^2\sin^3\omega t - + \cdots)\,dt \\ &= 4\frac{\varepsilon}{\omega}\int_{0}^{\pi/2\omega} (c_0\sin\omega t + c_1 A_k\omega\sin^2\omega t + c_2 A_k^2\omega^2\sin^3\omega t + \cdots)\,dt \end{aligned}$$

oder schließlich, wenn wir die Integrationen ausführen, die Grundgleichung

$$\left.\begin{aligned} q_k - q_{k+1} = 4\,\frac{\varepsilon}{\omega^2}\Big[c_0 + \frac{\pi}{4}\,c_1 A_k\,\omega + \frac{2}{3}\,c_2 A_k^2\,\omega^2 + \cdots + \\ + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu}\,\frac{\pi}{2}\,c_{2\nu-1} A_k^{2\nu-1}\,\omega^{2\nu-1} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2\nu+1)}\,c_{2\nu} A_k^{2\nu}\,\omega^{2\nu} + \cdots\Big], \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

die gemeinsam mit (3) den Zusammenhang zwischen den Amplituden und den Dämpfungskoeffizienten herstellt.

3. Die Berechnung der Dämpfungskoeffizienten. Um mit Hilfe der Grundgleichung (15) die Dämpfungskoeffizienten zu berechnen, führen wir in ihr als Abkürzungen die Summe zweier Nachbaramplituden

$$x_k = 2\,A_k = q_k + q_{k+1} \tag{16}$$

und ihre Differenz

$$y_k = q_k - q_{k+1} \tag{17}$$

sowie durch die Gleichungen

$$\varepsilon\,c_0 = C_0 = \frac{\omega^2}{4}\,\gamma_0\,, \quad \varepsilon\,c_\nu = C_\nu = \left\{\begin{aligned} &\frac{2}{\pi}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(\nu+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\nu}\left(\frac{2}{\omega}\right)^{\nu-2}\gamma_\nu \text{ für } \nu = 1, 3, 5, \ldots \\ &\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(\nu+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\nu}\left(\frac{2}{\omega}\right)^{\nu-2}\gamma_\nu \text{ für } \nu = 2, 4, 6, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

die reduzierten Dämpfungsfaktoren $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ein. Die Grundgleichung (15) läßt sich dann in der Form schreiben

$$y_k = f(x_k)\,, \tag{19}$$

wobei

$$f(x) \equiv \gamma_0 + \gamma_1\,x + \gamma_2\,x^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu\,x^\nu \tag{20}$$

eine Potenzreihe bedeutet, deren Koeffizienten die reduzierten Dämpfungsfaktoren sind.

Die praktische Aufgabe besteht nun darin, daß man sich die experimentell gewonnenen Amplituden $q_0, q_1, \ldots, q_k, \ldots$ sowie die Kreisfrequenz ω vorschreibt, hieraus die Summen x_k nach (16) und die Differenzen y_k nach (17) berechnet und nun die Koeffizienten der Reihe für $f(x)$ so bestimmt, daß die Gleichung (19) für sämtliche Wertepaare (x_k, y_k) erfüllt wird. Wir werden demnach bei $N+2$ Versuchswerten $q_0, q_1, \ldots q_{N+1}$ und somit $N+1$ Wertepaaren $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ die Bedingung (19) schon mit einer bei $\nu = N$ abbrechenden Reihe (20) für alle (x_k, y_k) befriedigen können. Die reduzierten Dämpfungsfaktoren γ_k kann man hierbei etwa mit Hilfe einer der bekannten Interpolationsformeln von *Newton* oder von *Lagrange* berechnen.

Meistens wird man aber von vornherein voraussetzen, daß sich die Dämpfungsfunktion $g(\dot{q})$ durch ein Polymon mit einer bestimmten, endlich großen Zahl von $n+1$ Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ wiedergeben läßt. (Oft wird man sich dabei auf $n = 2$, also den Ausdruck

$$g(\dot{q}) = c_0\cdot\frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} + c_1\dot{q} + c_2\,|\dot{q}|\,\dot{q}$$

beschränken.) Liefert nun der Versuch mehr Wertepaare (x_k, y_k) als die Anzahl $(n+1)$ der gesuchten Dämpfungskoeffizienten beträgt, so werden wir im allgemeinen die Gleichung (19) nicht mehr für sämtliche Versuchswerte streng befriedigen können. Wir suchen dann wenigstens die Faktoren γ_ν so zu bestimmen, daß die Gleichung (19) für alle (x_k, y_k) möglichst gut erfüllt wird. Dies geschieht am zweckmäßigsten mittels der Methode der kleinsten Quadrate. Verlangen wir, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen der $N+1$ Funktionswerte $f(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$ von den experimentell vorgeschriebenen Werten y_k ein Minimum werde, so müssen bekanntlich die Dämpfungsfaktoren γ_ν das folgende System von linearen Gleichungen befriedigen:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{N}x_k^{\nu+\mu}\right)\gamma_\nu = \sum_{k=0}^{N}\left(x_k^\mu\,y_k\right) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots n)\,, \tag{21}$$

wobei die Summen über k sich auf sämtliche aus den beobachteten Amplituden berechneten $N+1$ Wertepaare $(x_0, y_0), \ldots, (x_N, y_N)$ $(N > n)$ erstrecken. Es sei noch darauf hingewiesen,

daß diese Wertepaare auch von verschiedenen Amplitudenfolgen stammen dürfen, die zu verschiedenen Anfangswerten q_0 gehören. Man kann so durch eine hinreichend große Anzahl von Meßreihen eine beliebig dichte Folge von Meßpunkten im (x, y)-Diagramm herstellen.

Bisweilen ist es, besonders bei sehr schwach gedämpften Schwingungen, aus meßtechnischen Gründen nicht möglich, unmittelbar aufeinanderfolgende Amplituden so genau zu beobachten, daß ihre Differenzwerte y_k noch zuverlässig sind. In diesem Fall benützen wir nur die Amplituden nach je m Vollschwingungen ($m > 1$):

$$q_0, q_m, q_{2m}, \ldots, q_{km}, q_{(k+1)m}, \ldots,$$

setzen jetzt aber in (4) für die Konstante A_k nicht den Mittelwert der Nachbaramplituden, sondern denjenigen hintereinander gemessener Amplituden q_{km} und $q_{(k+1)m}$ ein und nehmen sinngemäß an, daß dieser Ansatz zwischen der $m\,k$-ten und der $m(k+1)$-ten Vollschwingung bestehen soll. Die (in diesem Fall formal gleich lautende) Gleichung (15) denken wir uns nun m-mal, und zwar für die Differenzen $q_{mk} - q_{mk+1}, q_{mk+1} - q_{mk+2}, \ldots, q_{m(k+1)-1} - q_{m(k+1)}$ angeschrieben. Die rechte Seite wird hierbei stets dieselbe Form haben wie in Gleichung (15). Addieren wir diese m Gleichungen, so erhalten wir links die Differenz $x_{mk} - x_{m(k+1)}$ und rechts das m-fache der rechten Seite von (15). Wenn wir jetzt in Abänderung von (16) und (17)

$$x_k = 2A_k = q_{mk} + q_{m(k+1)}, \qquad y_k = \frac{1}{m}(q_{mk} - q_{m(k+1)}) \tag{22}$$

setzen, so behalten die Beziehungen (18), (19) und (20) ihre Gestalt unverändert bei; wir können sie also nach wie vor zur Berechnung der Dämpfungskoeffizienten benützen. Die Genauigkeit des Verfahrens nimmt natürlich im allgemeinen mit wachsendem m ab.

4. Ein Zahlenbeispiel. An einem Zahlenbeispiel wollen wir die Anwendung des Verfahrens zeigen und gleichzeitig die allgemeinen Formeln für die praktische Rechnung im Fall $n = 2$ wiedergeben.

Durch Spiegelablesung wurden an einem Pendel mit der Schwingungsdauer von 1 sek (also $\omega = 2\pi\,\mathrm{sek}^{-1}$) nach je einem Hin- und Hergang die in der zweiten Spalte der Tabelle im Bogenmaß wiedergegebenen 11 Amplituden gemessen. Wir berechnen nun zuerst die Summen $x_k = q_k + q_{k+1}$ und die Differenzen $y_k = q_k - q_{k+1}$; sie stehen in der dritten und der vierten Spalte. Sodann bilden wir folgende Summen, jeweils von $k = 0$ bis $k = N$ mit $N = 9$:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum x_k^0 = N + 1 = 10,\\
&\textstyle\sum x_k = 0{,}2248,\\
&\textstyle\sum x_k^2 = 7{,}2062 \cdot 10^{-3},\\
&\textstyle\sum x_k^3 = 2{,}7788 \cdot 10^{-4},\\
&\textstyle\sum x_k^4 = 1{,}1828 \cdot 10^{-5};\\
&\textstyle\sum y_k = q_0 - q_{N+1} = 0{,}0272,\\
&\textstyle\sum x_k y_k = (q_0 + q_{N+1})(q_0 - q_{N+1}) =\\
&\qquad = 8{,}2144 \cdot 10^{-4},\\
&\textstyle\sum x_k^2 y_k = 3{,}1221 \cdot 10^{-5}.
\end{aligned}$$

k	q_k	x_k	y_k
0	0,0287	0,0514	0,0060
1	0,0227	0,0410	0,0044
2	0,0183	0,0330	0,0036
3	0,0147	0,0266	0,0028
4	0,0119	0,0214	0,0024
5	0,0095	0,0170	0,0020
6	0,0075	0,0132	0,0018
7	0,0057	0,0099	0,0015
8	0,0042	0,0070	0,0014
9	0,0028	0,0043	0,0013
10	0,0015		

Diese Werte setzen wir in das folgende Gleichungssystem ein, das sich aus (21) für $n = 2$ ergibt

$$\begin{aligned}
&(N+1)\cdot\gamma_0 + \textstyle\sum x_k \cdot \gamma_1 + \sum x_k^2 \cdot \gamma_2 = q_0 - q_{N+1},\\
&\textstyle\sum x_k \cdot \gamma_0 + \sum x_k^2 \cdot \gamma_1 + \sum x_k^3 \cdot \gamma_2 = (q_0 + q_{N+1})(q_0 - q_{N+1}),\\
&\textstyle\sum x_k^2 \cdot \gamma_0 + \sum x_k^3 \cdot \gamma_1 + \sum x_k^4 \cdot \gamma_2 = \sum x_k^2 y_k.
\end{aligned}$$

Lösen wir das System nach den drei Unbekannten γ_0, γ_1 und γ_2 auf, so erhalten wir

$$\gamma_0 = 0{,}001\,113, \qquad \gamma_1 = 0{,}033\,07, \qquad \gamma_2 = 1{,}1976. \tag{23}$$

Hiermit berechnen wir die Dämpfungskoeffizienten nach (18) zu

$$C_0 = \frac{\omega^2}{4}\gamma_0, \qquad C_1 = \frac{2\omega}{\pi}\gamma_1, \qquad C_2 = \frac{3}{2}\gamma_2,$$

also in Zahlen mit $\omega = 2\pi\,\mathrm{sek}^{-1}$:

$$C_0 = 0{,}010\,99\,\mathrm{sek}^{-2}, \qquad C_1 = 0{,}1323\,\mathrm{sek}^{-1}, \qquad C_2 = 1{,}7964.$$

Zusammen mit den Punkten (x_k, y_k) ist die Parabel

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2$$

in Abb. 1 dargestellt.

Um dieses Ergebnis mit demjenigen vergleichen zu können, das man erhalten hätte, wenn nur nach je $m = 3$ Vollschwingungen die Amplitude abgelesen worden wäre, setzen wir jetzt voraus, es seien nur die Werte q_0, q_3, q_6, q_9 vorgegeben. Wir bilden dann nach (22)

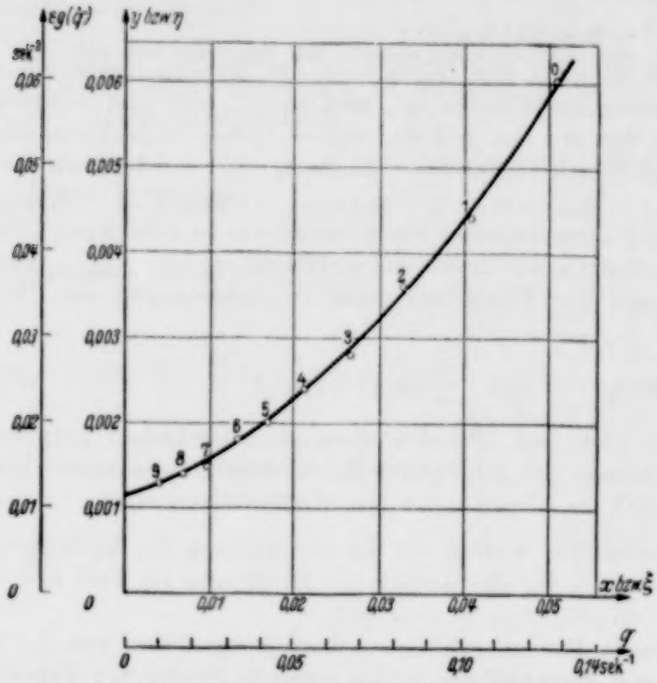

Abb. 1. Pendelversuch. Meßpunkte mit Näherungsparabel und Näherungsdiagramm der Dämpfungskraft.

$$x_0 = q_0 + q_3 = 0{,}0434\,,$$
$$x_1 = q_3 + q_6 = 0{,}0222\,,$$
$$x_2 = q_6 + q_9 = 0{,}0103\,;$$
$$y_0 = \frac{1}{3}(q_0 - q_3) = 0{,}00467\,,$$
$$y_1 = \frac{1}{3}(q_3 - q_6) = 0{,}00240\,,$$
$$y_2 = \frac{1}{3}(q_6 - q_9) = 0{,}00157\,.$$

Diese Werte müssen die folgenden drei Gleichungen befriedigen

$$y_0 = \gamma_0 + \gamma_1 x_0 + \gamma_2 x_0^2\,,$$
$$y_1 = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1^2\,,$$
$$y_2 = \gamma_0 + \gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_2^2\,,$$

aus denen sich die reduzierten Dämpfungsfaktoren der Reihe nach gemäß

$$\gamma_2 = \frac{1}{x_0 - x_2}\left(\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right),$$
$$\gamma_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} - \gamma_2 (x_0 + x_1)\,,$$
$$\gamma_0 = y_0 - \gamma_1 x_0 - \gamma_2 x_0^2$$

zu $\gamma_2 = 1{,}1277$, $\gamma_1 = 0{,}03310$, $\gamma_0 = 0{,}001109$ ergeben. Der größte Fehler (rund 6%) gegenüber den Werten (23) tritt somit bei γ_2 auf.

5. Direkte Aufnahme des Diagramms der Dämpfungskraft. Häufig dürfte es genügen, für den Verlauf der Dämpfungskraft als Funktion der Geschwindigkeit $\dot{q}$ eine graphische Darstellung in einem Diagramm zu erhalten. Wir können ein solches Diagramm auf einfachstem Weg direkt aus dem (x_k, y_k)-Diagramm gewinnen, wobei wir allerdings einen prinzipiellen, aber im allgemeinen unbedeutenden Fehler in Kauf nehmen müssen.

Wir gehen hierbei von der folgenden Überlegung aus. Schreibt man die sich aus (2) ergebende, für $\dot{q} > 0$ gültige Gleichung der Dämpfungskraft

$$\varepsilon\, g(\dot{q}) = C_0 + C_1 \dot{q} + C_2 \dot{q}^2 + C_3 \dot{q}^3 + \cdots$$

in der Form

$$\frac{4}{\omega^2}\varepsilon\, g(\dot{q}) = \gamma_0 + \gamma_1\left(\alpha_1 \frac{\dot{q}}{\omega}\right) + \gamma_2\left(\alpha_2 \frac{\dot{q}}{\omega}\right)^2 + \gamma_3\left(\alpha_3 \frac{\dot{q}}{\omega}\right)^3 + \cdots,$$

so werden nach (18) die Faktoren

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = 8/\pi = 2{,}546\,, \quad \alpha_2 = \sqrt{6} = 2{,}449\,, \quad \alpha_3 = \sqrt[3]{128/3\,\pi} = 2{,}388\,,\\ &\alpha_4 = \sqrt[4]{30} = 2{,}340\,, \quad \alpha_5 = \sqrt[5]{1024/5\,\pi} = 2{,}306\,, \quad \alpha_6 = \sqrt[6]{140} = 2{,}279, \ldots,\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

und es läßt sich aus der Konvergenz des *Wallis*schen unendlichen Produktes für $\pi/2$ schließen, daß die α_ν für $\nu \to \infty$ gegen den Wert 2 streben müssen. Brechen wir die Reihe für $g(\dot{q})$ nach dem Glied mit $\dot{q}^2$ ab, so treten nur die Faktoren α_1 und α_2 auf. Wir ersetzen diese näherungsweise durch den einfachen Zwischenwert 5/2 und erhalten so — allerdings nicht mehr streng richtig — mit den zu $\dot{q}$ bzw. $\varepsilon\, g(\dot{q})$ proportionalen Veränderlichen

$$\xi = \frac{5}{2\,\omega}\dot{q}\,, \qquad \eta = \frac{4}{\omega^2}\varepsilon\, g\,(\dot{q}) \tag{25}$$

die Darstellung

$$\eta(\xi) \approx \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 \tag{26}$$

für die Dämpfungskraft $\varepsilon g(\dot{q}) = \omega^2 \eta/4$. Die strenge Gleichung für die in ξ und η nach (25) dargestellte Dämpfungskraft wäre

$$\eta(\xi) = \gamma_0 + \frac{3{,}2}{\pi} \gamma_1 \xi + \frac{24}{25} \gamma_2 \xi^2 . \tag{27}$$

Stehen uns jetzt hinreichend viele experimentell ermittelte Punkte (x_k, y_k) im (x, y)-Diagramm zur Verfügung, um zwischen ihnen eine Parabel hindurchlegen zu können, so läßt sich diese Parabel bei geeigneter Wahl des Maßstabes der Achsen sofort in guter Näherung als Bild des Verlaufs der Dämpfungskraft $\varepsilon g(\dot{q})$ für $\dot{q} > 0$ verwenden. (Den Verlauf für $\dot{q} < 0$ erhält man durch Spiegelung des Parabelstücks am Ursprung.) Da aus den in (24) wiedergegebenen Werten der Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ hervorgeht, daß diese ziemlich langsam kleiner werden, können wir sogar auch noch ohne allzu große Fehler eine geeignete (natürlich möglichst einfache) Kurve von höherer als zweiter Ordnung als Näherungskurve nach Augenmaß zwischen den Punkten (x_k, y_k) hindurchlegen und erhalten auch so noch durch einfache Änderung der Maßstäbe der beiden Achsen direkt eine brauchbare Näherung für das Diagramm der von $\dot{q}$ abhängigen Dämpfungskraft, wobei wir aus der Streuung der Meßpunkte unmittelbar auf die Zuverlässigkeit des Ergebnisses schließen können.

Für das Zahlenbeispiel in Ziff. 4 weicht die Näherungsparabel für $\eta(\xi)$ nach (26), die ja mit der eingezeichneten nach Einführung eines (ξ, η)-Systems identisch ist, nur um wenig mehr als Strichstärke von der durch die genaue Gleichung (27) bestimmten Parabel ab, auf deren Wiedergabe daher verzichtet wurde.

(Eingegangen am 24. Oktober 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr. *H. Kauderer*, Stuttgart-N, Viergiebelweg 11.

Gesetzmäßigkeiten von Torsionsschwingungszahlen und Aufstellung einfacher Grenzwertformeln.

Von H. Neuber

1. Einführung. Die kritischen Drehzahlen von mit Masse belegten biegesteifen Wellen sind bereits eingehend untersucht worden, wobei sich einfache Formeln zur Bestimmung oberer und unterer Grenzwerte ergeben haben[1]; ähnliche Gedankengänge werden in vorliegender Arbeit für das Torsionsschwingungsproblem durchgeführt und zur Aufstellung einfacher, für die praktische Anwendung geeigneter Rechenverfahren herangezogen. Bei sehr vielen Massen ist es von großem Vorteil, für die Eigenfrequenzen obere und untere Grenzwerte zu kennen, um bei der numerischen Berechnung Kontrollmöglichkeiten zur Verfügung zu haben. Aus der für das Torsionsschwingungsproblem maßgeblichen Determinante werden nachstehend für diese Grenzwerte durch besondere Umformungen einfache Formeln hergeleitet.

2. Ausgangsgleichungen. Werden die in den einzelnen Wellenabschnitten (Index k) übertragenen Torsionsmomente entsprechend Abb. 1 mit M_k, die dazugehörigen Federkonstanten mit c_k, die Trägheitsmomente mit Θ_k und Θ_{k+1} (links bzw. rechts), die zugehörigen Drehwinkel mit φ_k und φ_{k+1} gekennzeichnet, so gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$M_k - M_{k-1} = \Theta_k \ddot{\varphi}_k \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2 \cdots n \tag{1}$$

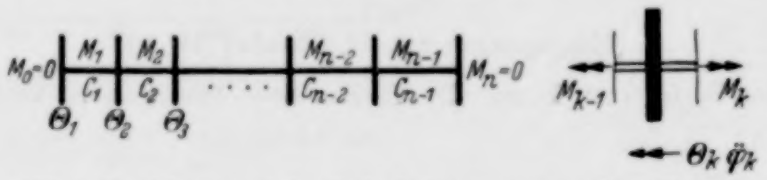

Abb. 1. Bezeichnungen beim Drehschwingungssystem mit n Massen.

Hierzu kommen als Formänderungs- bzw. Elastizitätsgleichungen

$$M_k = c_k (\varphi_{k+1} - \varphi_k) . \tag{2}$$

Wird (1) durch Θ_k dividiert, so folgt

$$\ddot{\varphi}_k = \frac{M_k - M_{k-1}}{\Theta_k} \tag{3}$$

bzw. mit $k + 1$ statt k

$$\ddot{\varphi}_{k+1} = \frac{M_{k+1} - M_k}{\Theta_{k+1}} . \tag{4}$$

Wird (3) subtrahiert, so kommt

$$\ddot{\varphi}_{k+1} - \ddot{\varphi}_k = \frac{M_{k-1}}{\Theta_k} - M_k \left(\frac{1}{\Theta_k} + \frac{1}{\Theta_{k+1}} \right) + \frac{M_{k+1}}{\Theta_{k+1}} . \tag{5}$$

Andererseits liefert (2) nach Division durch c_k und Differentiation nach der Zeit

$$\ddot{\varphi}_{k+1} - \ddot{\varphi}_k = \frac{1}{c_k} \ddot{M}_k . \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt als Differential-Differenzgleichung des Drehschwingungsproblems:

$$\frac{M_{k-1}}{\Theta_k} - \frac{\ddot{M}_k}{c_k} - M_k \left(\frac{1}{\Theta_k} + \frac{1}{\Theta_{k+1}} \right) + \frac{M_{k+1}}{\Theta_{k+1}} = 0 . \tag{7}$$

Da für die Abhängigkeit von der Zeit nur trigonometrische Funktionen in Betracht kommen, d. h.

$$M_k = \overline{M}_k \sin (\omega t) \tag{8}$$

[1] *Biezeno-Grammel*, Technische Dynamik Bd. 2, Kap. X, 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.

(ω Eigenfrequenz), so gilt

$$\ddot{M}_k = -\omega^2 M_k , \tag{9}$$

und (7) geht in die Differenzengleichung

$$\frac{M_{k-1}}{\Theta_k} + \left(\frac{\omega^2}{c_k} - \frac{1}{\Theta_k} - \frac{1}{\Theta_{k+1}}\right) M_k + \frac{M_{k+1}}{\Theta_{k+1}} = 0 \tag{10}$$

mit den Anfangs- bzw. Endbedingungen $M_0 = M_n = 0$ über[1].

3. Die Frequenzdeterminante. Für die $n-1$ Unbekannten M_k gelten daher $n-1$ lineare homogene Gleichungen, welche nur dann auf nicht-triviale Lösungen führen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, d. h. es muß

$$\begin{vmatrix}
\frac{\omega^2}{c_1} - \frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_2} & \frac{1}{\Theta_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{1}{\Theta_2} & \frac{\omega^2}{c_2} - \frac{1}{\Theta_2} - \frac{1}{\Theta_3} & \frac{1}{\Theta_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\Theta_3} & \frac{\omega^2}{c_3} - \frac{1}{\Theta_3} - \frac{1}{\Theta_4} & \frac{1}{\Theta_4} & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\Theta_{n-1}} & \frac{\omega^2}{c_{n-1}} - \frac{1}{\Theta_{n-1}} - \frac{1}{\Theta_n}
\end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

sein. Wird noch das Vorzeichen jeder geradzahligen Spalte und jeder ungeradzahligen Zeile gewechselt, so stehen vor allen Trägheitsmomenten positive Vorzeichen:

$$\begin{vmatrix}
\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2} - \frac{\omega^2}{c_1} & \frac{1}{\Theta_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{1}{\Theta_2} & \frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3} - \frac{\omega^2}{c_2} & \frac{1}{\Theta_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\Theta_3} & \frac{1}{\Theta_3} + \frac{1}{\Theta_4} - \frac{\omega^2}{c_3} & \frac{1}{\Theta_4} & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\Theta_{n-1}} & \frac{1}{\Theta_{n-1}} + \frac{1}{\Theta_n} - \frac{\omega^2}{c_{n-1}}
\end{vmatrix} = 0 . \tag{12}$$

Die gestrichelten Abgrenzungen zeigen die für $n = 2, 3, 4$ usw. jeweils in Betracht kommenden Determinanten.

4. Die Auflösung der Determinante. Bei der Auflösung der Determinante ist es vorteilhaft, zunächst die für $\omega = 0$ verbleibende Restdeterminante näher zu untersuchen. Diese wird

$$\text{für } n = 2: \qquad D_2 = \frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2} = \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1 \Theta_2},$$

$$\text{für } n = 3: \qquad D_3 = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) & \frac{1}{\Theta_2} \\ \frac{1}{\Theta_2} & \left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right) \end{vmatrix} = \frac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3}{\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3},$$

$$\text{für } n = 4: \qquad D_3 = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) & \frac{1}{\Theta_2} & 0 \\ \frac{1}{\Theta_2} & \left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right) & \frac{1}{\Theta_3} \\ 0 & \frac{1}{\Theta_3} & \left(\frac{1}{\Theta_3} + \frac{1}{\Theta_4}\right) \end{vmatrix} = \frac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4}{\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \Theta_4}, \tag{13}$$

[1] Die Differenzgleichung (10) ist identisch mit der *Grammel*schen Rekursionsformel; siehe *Biezeno-Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 362—363.

demnach allgemein bei n Massen:

$$D_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Theta_k}{\prod_{k=1}^{n} \Theta_k}. \tag{14}$$

Für die Hauptunterdeterminanten gilt Entsprechendes. Sie bestehen aus einem Produkt von zwei Determinanten, für welche das Bildungsgesetz (14) maßgebend ist, und errechnen sich aus

$$H_k = \frac{1}{\prod_{h=1}^{n} \Theta_h} \left(\sum_{l=1}^{k} \Theta_l\right)\left(\sum_{m=k+1}^{n} \Theta_m\right) \tag{15}$$

oder mit Bezug auf (14)

$$H_k = D_n \left(\sum_{p=1}^{k} \Theta_p\right)\left(\sum_{q=k+1}^{n} \Theta_q\right) \Big/ \left(\sum_{r=1}^{n} \Theta_r\right). \tag{16}$$

Wegen der Identität

$$\sum_{p=1}^{k} \Theta_p + \sum_{q=k+1}^{n} \Theta_q = \sum_{r=1}^{n} \Theta_r \tag{17}$$

kann (16) auch in der Form

$$H_k = D_n \Big/ \left(\frac{1}{\sum_{p=1}^{k} \Theta_p} + \frac{1}{\sum_{q=1}^{n} \Theta_q}\right) \tag{18}$$

geschrieben werden.

Weiter treten bei Auflösung der Determinante (12) auch Teildeterminaten auf, welche ebenfalls dem Bildungsgesetz (14) entsprechen, sich jedoch nur von einer bestimmten (h-ten) Zeile und Spalte bis zu einer anderen (k-ten) Zeile und Spalte erstrecken. Zu ihrer Kennzeichnung möge das Symbol

$$d_{h,k} = \sum_{p=h}^{k} \Theta_p \Big/ \prod_{q=h}^{k} \Theta_q \quad \text{mit} \quad \begin{cases} h \leqq k, \\ d_{h,h} = 1 \end{cases} \tag{19}$$

dienen. Vor allem treten Größen auf, welche Produkte dieser Teildeterminanten darstellen, jedoch mit der Ausnahme, daß bei benachbarten Teildeterminanten das Produkt durch die Teildeterminante des so entstehenden gesamten Teilgebietes zu ersetzen ist. Zur abgekürzten Schreibweise seien folgende Symbole eingeführt:

$$f_h = d_{h,h+1}, \tag{20}$$

$$f_{hk} = \begin{cases} d_{h,h+1}\, d_{k,k+1} & \text{für} \quad k > h+1, \\ d_{h,h+2} & \text{für} \quad k = h+1, \end{cases} \tag{21}$$

$$f_{hkl} = \begin{cases} d_{h,h+1}\, d_{k,k+1}\, d_{l,l+1} & \text{für} \quad k > h+1;\ l > k+1, \\ d_{h,h+2}\, d_{l,l+1} & \text{für} \quad k = h+1;\ l > h+2, \\ d_{h,h+1}\, d_{k,k+2} & \text{für} \quad k > h+1;\ l = k+1, \\ d_{h,h+3} & \text{für} \quad k = h+1;\ l = h+2, \end{cases} \tag{22}$$

$$f_{hklm} = \begin{cases} d_{h,h+1}\, d_{k,k+1}\, d_{l,l+1}\, d_{m,m+1} & \text{für} \quad k > h+1,\ l > k+1,\ m > l+1, \\ d_{h,h+2}\, d_{l,l+1}\, d_{m,m+1} & \text{für} \quad k = h+1,\ l > k+1,\ m > l+1, \\ d_{h,h+1}\, d_{k,k+2}\, d_{m,m+1} & \text{für} \quad k > h+1,\ l = k+1,\ m > l+1, \\ d_{h,h+1}\, d_{k,k+1}\, d_{l,l+2} & \text{für} \quad k > h+1,\ l > k+1,\ m = l+1, \\ d_{h,h+3}\, d_{m,m+1} & \text{für} \quad k = h+1;\ l = h+2,\ m > l+1, \\ d_{h,h+1}\, d_{k,k+3} & \text{für} \quad k > h+1,\ l = k+1,\ m = k+2, \\ d_{h,h+4} & \text{für} \quad k = h+1,\ l = h+2,\ m = h+3 \end{cases} \tag{23}$$

usw.

Mit Hilfe dieser Abkürzungen führt die Auflösung der Determinante (12) auf folgende Gleichung $(n-1)$-ten Grades für ω^2:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{n-1}\prod_{p=1}^{n-1}\frac{1}{c_p}\Bigg[&\omega^{2n-2}-\omega^{2n-4}\sum_{h=1}^{n-1}c_h f_h+\omega^{2n-6}\sum_{h=1}^{n-2}\sum_{k=h+1}^{n-1}c_h c_k f_{hk}\\&-\omega^{2n-8}\sum_{h=1}^{n-3}\sum_{k=h+1}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1}c_h c_k c_l f_{hkl}\\&+\omega^{2n-10}\sum_{h=1}^{n-4}\sum_{k=h+1}^{n-3}\sum_{l=k+1}^{n-2}\sum_{m=l+1}^{n-1}c_h c_k c_l c_m f_{hklm}-+\cdots\Bigg]+D_n=0\,.\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

Dividiert man diese Gleichung durch ω^{2n-2}, so folgt

$$\left.\begin{aligned}D_n\Bigg[&\frac{1}{\omega^{2n-2}}-\frac{1}{\omega^{2n-4}}\sum_{h=1}^{n-1}\frac{g_h}{c_h}+\frac{1}{\omega^{2n-6}}\sum_{h=1}^{n-2}\sum_{k=h+1}^{n-1}\frac{g_{hk}}{c_h c_k}-\frac{1}{\omega^{2n-8}}\sum_{h=1}^{n-3}\sum_{k=h+1}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1}\frac{g_{hkl}}{c_h c_k c_l}\\&+\frac{1}{\omega^{2n-10}}\sum_{h=1}^{n-4}\sum_{k=h+1}^{n-3}\sum_{l=k+1}^{n-2}\sum_{m=l+1}^{n-1}\frac{g_{hklm}}{c_h c_k c_l c_m}-+\cdots\Bigg]+(-1)^{n-1}\prod_{h=1}^{n-1}\frac{1}{c_h}=0\,.\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

Hierbei wurden noch folgende weiteren Abkürzungen verwendet:

$$\left.\begin{aligned}g_h&=\Big(\sum_{p=1}^{h}\Theta_p\Big)\Big(\sum_{q=h+1}^{n}\Theta_q\Big)\Big/\Big(\sum_{r=1}^{n}\Theta_r\Big),\\g_{hk}&=\Big(\sum_{p=1}^{h}\Theta_p\Big)\Big(\sum_{q=h+1}^{k}\Theta_q\Big)\Big(\sum_{r=k+1}^{n}\Theta_r\Big)\Big/\Big(\sum_{s=1}^{n}\Theta_s\Big),\\g_{hkl}&=\Big(\sum_{p=1}^{h}\Theta_p\Big)\Big(\sum_{q=h+1}^{k}\Theta_q\Big)\Big(\sum_{r=k+1}^{l}\Theta_r\Big)\Big(\sum_{s=l+1}^{n}\Theta_s\Big)\Big/\Big(\sum_{t=1}^{n}\Theta_t\Big)\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

usw. Zu demselben Ergebnis wäre man auch durch Betrachtung der Potenzreihe für den Kehrwert des Frequenzquadrates gelangt.

5. Sätze über die Eigenfrequenzen. Wird weiter beachtet, daß die Determinante (12) infolge der Symmetrie reelle Wurzelquadrate hat und daß die Potenzentwicklungen (24) und (25) alternierende Vorzeichen aufweisen, so folgt die bekannte Tatsache, daß bei n Massen sämtliche $n-1$ Eigenfrequenzen reell sind. Schreibt man entsprechend dem Fundamentalsatz der Algebra die Potenzentwicklungen (24) und (25) in Produktform, so gilt, wenn die Eigenfrequenzen mit ω_1 (Grundfrequenz) $< \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_{n-2}$, allgemein mit ω_h gekennzeichnet werden,

$$(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)\cdots\cdots\cdots(\omega^2-\omega_{n-1}^2)=0\tag{27}$$

bzw.

$$\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega_2^2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega_{n-1}^2}\right)=0\,.\tag{28}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man aus (24) und (27)

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{h=1}^{n-1}\omega_h^2=\sum_{h=1}^{n-1}c_h f_h\,,\qquad\sum_{h=1}^{n-2}\sum_{k=h+1}^{n-1}\omega_h^2\omega_k^2=\sum_{h=1}^{n-2}\sum_{k=h+1}^{n-1}c_h c_k f_{hk}\,,\\&\sum_{h=1}^{n-3}\sum_{k=h+1}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1}\omega_h^2\omega_k^2\omega_l^2=\sum_{h=1}^{n-3}\sum_{k=h+1}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1}c_h c_k c_l f_{hkl}\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

usw., bzw. aus (25) und (28):

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{h=1}^{n-1}\frac{1}{\omega_h^2}=\sum_{h=1}^{n-1}\frac{g_h}{c_h},\qquad\sum_{n-2}^{n-2}\sum_{k=h+1}^{n-1}\frac{1}{\omega_h^2\omega_k^2}=\sum_{h=1}^{n-2}\sum_{k=h+1}^{n-1}\frac{g_{hk}}{c_h c_k},\\&\sum_{h=1}^{n-3}\sum_{k=h+1}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1}\frac{1}{\omega_h^2\omega_k^2\omega_l^2}=\sum_{h=1}^{n-3}\sum_{k=h+1}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1}\frac{g_{hkl}}{c_h c_k c_l}\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

usw.

Es stellt sich heraus, daß die in (29) und (30) rechtsstehenden Ausdrücke Frequenzprodukte bzw. deren Kehrwerte darstellen, und zwar von Ersatzsystemen, die einerseits durch Weg-

nahme von Steifigkeiten andererseits durch Erstarrung einzelner Wellenteile entstehen. Zunächst erkennt man in der ersten Gleichung (29) als rechtsstehenden Summanden die Eigenfrequenz eines Zweimassensystems, gebildet von den Trägheitsmomenten Θ_h und Θ_{h+1}, mit dem dazwischen befindlichen Wellenteil (Federkonstante c_h, Abb. 2). Wird das zugehörige Frequenzquadrat mit $\alpha^2_{1,h}$ gekennzeichnet, so gilt mit Bezug auf die Definitionen (19) und (20)

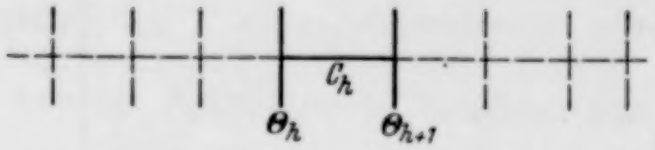

Abb. 2. Zweimassensystem, entstanden durch Wegnahme aller Steifigkeiten, bis auf die Stelle h.

$$\alpha^2_{1,h} = c_h f_h = c_h d_{h,h+1} \tag{31}$$

In der zweiten Gleichung (29) treten gemäß der Vorschrift (21) einerseits Produkte solcher Frequenzen von Zweimassensystemen auf, andererseits aber auch (bei benachbarter Lage der Stellen h und k) Produkte von Frequenzquadraten von Dreimassensystemen, wie sie Abb. 3 zeigt. Die nähere Betrachtung zeigt sofort im Anschluß an die Definition (19), daß in der Tat für das Produkt der Quadrate der beiden Eigenfrequenzen des in Abb. 3 dargestellten Dreimassensystems die Beziehung gilt

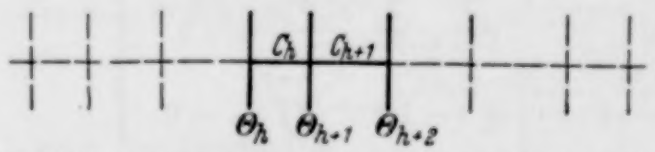

Abb. 3. Dreimassensystem, entstanden durch Wegnahme aller Steifigkeiten, bis auf die benachbarten Stellen h, $h+1$, $h+2$.

$$\alpha^2_{2,h}\,\alpha^2_{2,h+1} = c_h\,c_{h+1}\,f_{h,h+1} = c_h\,c_{h+1}\,d_{h,h+2}. \tag{32}$$

Ebenso stellt der Summand der rechten Seite der dritten Gleichung (29) das Produkt dreier Frequenzquadrate dar, wobei es sich entsprechend der Vorschrift (22) entweder um die Eigenfrequenzquadrate von drei selbständigen Zweimassensystemen oder um ein Dreimassen- und ein Zweimassensystem, oder um ein Viermassensystem (Abb. 4) handelt. Die jeweils auftretenden Eigenfrequenzen erhalten als zweiten Index einen der Indices der in Betracht kommenden Federkonstanten. Bei benachbarter Lage gilt für das Produkt der Frequenzquadrate des Viermassensystems

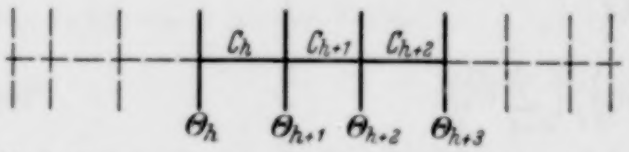

Abb. 4. Viermassensystem, entstanden durch Wegnahme aller Steifigkeiten bis auf die benachbarten Stellen h, $h+1$, $h+2$, $h+3$.

$$\alpha^2_{3,h}\,\alpha^2_{3,h+1}\,\alpha^2_{3,h+2} = c_h\,c_{h+1}\,c_{h+2}\,f_{h,h+1,h+2} = c_h\,c_{h+1}\,c_{h+2}\,d_{h,h+3}. \tag{33}$$

Allgemein gilt für das Produkt der Frequenzquadrate eines aus $q+1$ Massen, also q Wellenabschnitten bestehenden Teilsystems die Beziehung

$$\prod_{p=1}^{q} \alpha^2_{q,h+p-1} = \prod_{p=1}^{q} c_{h+p-1}\,d_{h,h+q}. \tag{34}$$

Analog lassen sich die Summanden der rechten Seiten von (30) deuten. In der ersten Gleichung (30) erkennt man mit Rücksicht auf die Definition (26) als Summanden den Kehrwert des Frequenzquadrates eines durch Erstarrung aller Wellenteile mit Ausnahme der Stelle h entstandenen Ersatzsystems (Abb. 5). Als linke Masse gilt die Summe aller Massen von der Stelle 1 bis zur Stelle h, als rechte Masse die Summe aller Massen von der Stelle $h+1$ bis zur Stelle n, wobei alle Federkonstanten außer c_h unendlich sind. Im Hinblick auf die erste Definitionsgleichung (26) erkennt man, daß in der Tat für das Frequenzquadrat dieses Systems die Beziehung

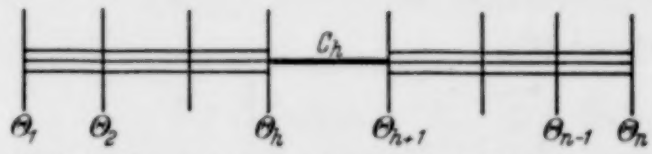

Abb. 5. Zweimassensystem, entstanden durch Erstarrung aller Wellenteile, mit Ausnahme der Stelle h.

$$c_1 = c_2 \cdots = c_{h-1} = c_{h+1} = c_{h+2} = \cdots = c_{h-1} = \infty,$$

$$\beta^2_{1,h} = \frac{c_h}{g_h} \tag{35}$$

gilt. In der zweiten Gleichung (30) handelt es sich um Produkte der Kehrwerte der Frequenzquadrate von Dreimassensystemen, wie sie durch Erstarrung aller Wellenteile mit Ausnahme von zweien entstehen (Abb. 6). Der Vergleich des Bildungsgesetzes der zweiten Gleichung (26) mit den Gesetzmäßigkeiten beim Dreimassensystem bestätigt unmittelbar diesen Zusammenhang. Für das Produkt der Frequenzquadrate des in Abb. 6 gezeichneten Ersatzsystems er-

hält man daher

$$\beta^2_{2,h}\,\beta^2_{2,k} = \frac{c_h\,c_k}{g_{h,k}}. \tag{36}$$

In der gleichen Weise läßt sich der in der dritten Gleichung (30) rechts auftretende Summand als Kehrwert des Produktes der drei Eigenfrequenzquadrate eines durch teilweise Erstarrung nach Art von Abb. 7 entstehenden Viermassensystems deuten. Man erhält für das Produkt der drei Frequenzquadrate des in Abb. 7 ersichtlichen Systems mit Bezug auf die dritte Gleichung (26) den Ausdruck

$$\beta^2_{3,h}\cdot\beta^2_{3,k}\cdot\beta^2_{3,l} = \frac{c_h\,c_k\,c_l}{g_{h\,k\,l}}. \tag{37}$$

Abb. 6. Dreimassensystem, entstanden durch Erstarrung aller Wellenteile, mit Ausnahme der Stellen h und k.

usw.

Die weitere Fortsetzung ergibt sich entsprechend dem leicht erkennbaren Bildungsgesetz.

Die so gewonnenen Deutungen bilden den Inhalt wichtiger Eigenschaften der Eigenfrequenzquadrate, die sich in besonderen Sätzen zusammenfassen lassen. Die erste Gleichung (29) führt im Hinblick auf (31) zu folgendem

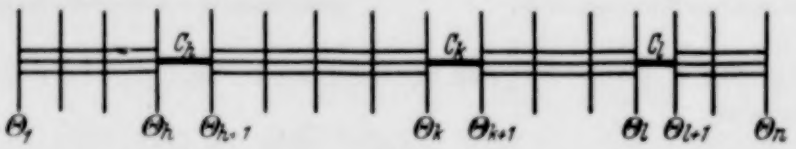

Abb. 7. Viermassensysteme, entstanden durch Erstarrung aller Wellenteile, mit Ausnahme der Stellen h, k und l.

Satz 1: Die Summe der Eigenfrequenzquadrate ist gleich der Summe der Frequenzquadrate aller Zweimassensysteme, die sich durch Wegnahme aller Steifigkeiten bis auf eine herstellen lassen.

Ebenso führt die erste Gleichung (30) im Zusammenhang mit (35) auf folgenden

Satz 2: Die Summe der Kehrwerte der Frequenzquadrate ist gleich der Summe der Kehrwerte der Quadrate der Frequenzen aller Zweimassensysteme, die durch Erstarrung aller Wellenteile außer einem herstellbar sind.

Die weiteren Gleichungen (29) und (30) enthalten ähnliche Aussagen über die Summen der Produkte der Quadrate der Eigenfrequenzen bzw. deren Kehrwerte, die hier jedoch nicht einzeln aufgeführt werden sollen.

6. Aufstellung oberer und unterer Schranken für die Eigenfrequenzen. Nachdem nunmehr die Koeffizienten der Gleichung $(n-1)$-ten Grades in einfacher Weise als Produkte von Frequenzquadraten bzw. deren Kehrwerte gedeutet werden können, ist es leicht möglich, obere und untere Grenzwerte für die Eigenfrequenzen anzugeben. Zunächst liefert die erste Gleichung (29) einen oberen Grenzwert für die höchste Eigenfrequenz

$$\omega^{*2}_{n-1} = \sum_{h=1}^{n-1} \alpha^2_{1,h} > \omega^2_{n-1}\,. \tag{38}$$

Ebenso liefert die erste Gleichung (30) einen unteren Grenzwert für die niedrigste Eigenfrequenz

$$\omega^{*2}_1 = \frac{1}{\sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{\beta^2_{1,h}}} < \omega^2_1\,. \tag{39}$$

Weitere Grenzwerte erhält man unter Beachtung der bekannten Gesetzmäßigkeit, daß die Eigenfrequenzen bei Erhöhung der Steifigkeiten zunehmen, bei Erhöhung der Massen jedoch abnehmen. Die sinngemäße Anwendung auf n-Massen Systeme führt zu folgendem

Satz 3: Die $n-1$ Eigenfrequenzen eines n-Massensystems nehmen sämtlich bei Erhöhung einer Federkonstanten des Systems zu und bei Erhöhung einer Masse des Systems ab, und umgekehrt.

Nimmt man an einem System Steifigkeitserhöhungen oder Massenverringerungen beliebiger Art vor, so erhält man für das neue System neue Eigenfrequenzen, die wieder der Größe

nach zu ordnen sind. Für die Frequenzen des Ausgangssystems galten die Ungleichungen

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_{n-1}. \tag{40}$$

Werden die Frequenzen des neuen Systems durch einen Querstrich gekennzeichnet und in derselben Weise der Größe nach geordnet, so gilt

$$\overline{\omega}_1 < \overline{\omega}_2 < \overline{\omega}_3 < \cdots < \overline{\omega}_{n-1}. \tag{41}$$

Der Inhalt des vorstehend ausgesprochenen Satzes besagt dann für Streifigkeitserhöhungen bzw. Massenverringerungen folgende Ungleichungen

$$\overline{\omega}_1 > \omega_1; \quad \overline{\omega}_2 > \omega_2, \quad \overline{\omega}_3 > \omega_3, \quad \cdots \overline{\omega}_{n-1} > \omega_{n-1}. \tag{42}$$

Der Satz ist offenbar in dieser Allgemeinheit noch nicht bewiesen worden, so daß der mathematische Beweis nachgeholt werden muß. Für ein Zweimassensystem mit den Massen Θ_1, Θ_2

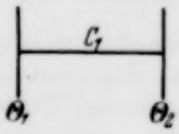

Abb. 8. Zweimassensystem an der Stelle 1 mit den unmittelbar benachbarten Schwungmassen.

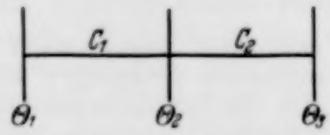

Abb. 9. Dreimassensystem, gebildet von den Wellenteilen 1 und 2 mit den Schwungmassen Θ_1, Θ_2, Θ_3.

und der Federkonstanten c_1 (Abb. 8) geht dieser Sachverhalt direkt aus der Formel für das Frequenzquadrat hervor:

$$\omega_1^2 = c_1\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right). \tag{43}$$

Für ein Dreimassensystem mit den Massen Θ_1, Θ_2, Θ_3 und den Federkonstanten c_1, c_2 (Abb. 9) gelten mit Bezug auf (29) folgende Beziehungen:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = c_1\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) + c_2\left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right), \tag{44}$$

$$\omega_1^2\,\omega_2^2 = c_1\,c_2\,\frac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3}{\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3}. \tag{45}$$

Man erkennt hierbei zwar direkt aus dem Aufbau der rechten Seiten dieser beiden Gleichungen, daß sowohl bei Zunahme einer Federkonstanten, als auch bei Abnahme einer der drei Massen die Summe und das Produkt der beiden Frequenzquadrate zunehmen. Daraus folgt jedoch nicht, daß jedes Frequenzquadrat einzeln zunimmt. Zur Durchführung des Beweises ist es zweckmäßig, zunächst aus den Gleichungen (44) und (45) einige Ungleichungen herzuleiten. Quadriert man (44) und subtrahiert die mit 4 multiplizierte Gleichung (45), so folgt

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 = \left[c_1\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) + c_2\left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right)\right]^2 - 4\,c_1\,c_2\,\frac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3}{\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3} \tag{46}$$

bzw. nach Umformung

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 = \left[c_2\left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right) - c_1\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right)\right]^2 + 4\,\frac{c_1\,c_2}{\Theta_2^2}. \tag{47}$$

Demnach besteht die Ungleichung

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 > \left| c_2\left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right) - c_1\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right)\right|. \tag{48}$$

Mit Rücksicht auf (44) folgt entweder

$$\omega_2^2 > c_2\left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right) > c_1\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) > \omega_1^2 \tag{49}$$

oder

$$\omega_2^2 > c_1\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) > c_2\left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right) > \omega_1^2. \tag{50}$$

Wird nochmals (45) herangezogen, indem das Produkt der Frequenzquadrate durch $c_1\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right)$ bzw. $c_2\left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right)$ dividiert wird, so folgen im Anschluß an die Ungleichungen (49) und (50) noch

die weiteren Ungleichungen

$$\omega_2^2 > c_2\left(\frac{1}{\Theta_1+\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_3}\right) > c_1\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_2+\Theta_3}\right) > \omega_1^2 \tag{51}$$

oder

$$\omega_2^2 > c_1\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_2+\Theta_3}\right) > c_2\left(\frac{1}{\Theta_3}+\frac{1}{\Theta_1+\Theta_2}\right) > \omega_1^2 . \tag{52}$$

Zu demselben Ergebnis wäre man gelangt, wenn man von den Kehrwerten der Frequenzquadrate ausgegangen wäre und (30) zugrunde gelegt hätte.

Schließlich wird noch eine weitere Umformung der Gleichung (47) benötigt. Man erkennt leicht, daß folgende Darstellung mit (47) identisch ist:

$$(\omega_2^2-\omega_1^2)^2 = \frac{1}{(c_1+c_2)^2}\left\{\left[c_1 c_2\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_3}\right)-\left(\frac{c_1^2}{\Theta_1}+\frac{(c_1+c_2)^2}{\Theta_2}+\frac{c_2^2}{\Theta_3}\right)\right]^2+\frac{4\,c_1^2 c_2^2}{\Theta_1\Theta_3}\left[\frac{c_1\Theta_3}{c_2\Theta_1}+\frac{c_2\Theta_1}{c_1\Theta_3}-2\right]\right\}. \tag{53}$$

Andererseits läßt sich (44) auch folgendermaßen darstellen:

$$\omega_1^2+\omega_2^2 = \frac{1}{c_1+c_2}\left[c_1 c_2\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_3}\right)+\left(\frac{c_1^2}{\Theta_1}+\frac{(c_1+c_2)^2}{\Theta_2}+\frac{c_2^2}{\Theta_3}\right)\right]. \tag{54}$$

Aus (53) geht hervor, daß die Ungleichung

$$\omega_2^2-\omega_1^2 > \frac{1}{c_1+c_2}\left|c_1 c_2\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_3}\right)-\left(\frac{c_1^2}{\Theta_1}+\frac{(c_1+c_2)}{\Theta_2}+\frac{c_2^2}{\Theta_3}\right)\right| \tag{55}$$

besteht. Mit Bezug auf (54) ergeben sich daher als weitere Ungleichungen für die Frequenzquadrate

$$\omega_2^2 > \frac{c_1 c_2}{c_1+c_2}\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_3}\right) > \frac{1}{c_1+c_2}\left[\frac{c_1^2}{\Theta_1}+\frac{(c_1+c_2)^2}{\Theta_2}+\frac{c_2^2}{\Theta_3}\right] > \omega_1^2 \tag{56}$$

oder

$$\omega_2^2 > \frac{1}{c_1+c_2}\left[\frac{c_1^2}{\Theta_1}+\frac{(c_1+c_2)}{\Theta_2}+\frac{c_2^2}{\Theta_3}\right] > \frac{c_1 c_2}{c_1+c_2}\left(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_3}\right) < \omega_1^2 . \tag{57}$$

Wird wieder (45) herangezogen und das Produkt der Frequenzquadrate abwechselnd durch eine der beiden, in den Ungleichungen (56) und (57) auftretenden Schranken dividiert, so folgen die weiteren Ungleichungen

$$\omega_2^2 > \frac{c_1 c_2 (c_1+c_2)(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3)}{\Theta_1\Theta_2\Theta_3\left[\frac{c_1^2}{\Theta_1}+\frac{(c_1+c_2)}{\Theta_2}+\frac{c_2^2}{\Theta_3}\right]} > (c_1+c_2)\left(\frac{1}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_1+\Theta_3}\right) > \omega_1^2 \tag{58}$$

oder

$$\omega_2^2 > (c_1+c_2)\left(\frac{1}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_1+\Theta_3}\right) > \frac{c_1 c_2 (c_1+c_2)(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3)}{\Theta_1\Theta_2\Theta_3\left[\frac{c_1^2}{\Theta_1}+\frac{(c_1+c_2)^2}{\Theta_2}+\frac{c_2^2}{\Theta_3}\right]} > \omega_1^2 . \tag{59}$$

Auch diese Ungleichungen hätte man — ebenso wie die Ungleichungen (51) und (52) — aus den für die Kehrwerte der Frequenzquadrate geltenden Gleichungen (30) herleiten können. Damit sind eine Reihe unterer Schranken für die Oberfrequenz und oberer Schranken für die

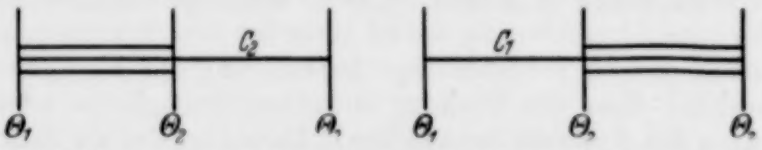

Abb. 10. Übergang vom Dreimassensystem der Abb. 9 in Zweimassensysteme, durch Erstarrung jeweils eines der beiden Wellenteile.

Grundfrequenz gewonnen. Sie lassen sich z. T. als Frequenzen von Zweimassensystemen deuten, welche durch Wegnahme von Massen, Verschwinden von Federkonstanten oder teilweise Erstarrung aus dem Dreimassensystem entstehen. So sind in den Ungleichungen (49) und (50) auftretenden Schranken die Frequenzquadrate von Zweimassensystemen, die durch Verschwinden einer der beiden Federkonstanten oder einer der beiden Endmassen aus dem Dreimassensystem entstanden sind. Bei den in den Ungleichungen (51) und (52) vorkommenden Schranken handelt es sich um Frequenzquadrate von Zweimassensystemen, die durch teilweise Erstarrung des Dreimassensystems entstanden sind (Abb. 10). Andererseits entspricht der in

der Ungleichung (56) links, bzw. in (57) rechts stehende Schrankenwert dem Frequenzquadrat des bei Wegnahme der mittleren Masse entstehenden Zweimassensystems (Abb. 11). Schließlich findet sich in der Ungleichung (58) rechts, bzw. in (59) links als Schrankenwert das Frequenzquadrat eines Zweimassensystems vor, das durch starre Verbindung der äußeren Massen aus dem Dreimassensystem entstanden ist (Abb. 12).

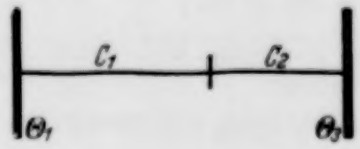

Abb. 11. Übergang vom Dreimassensystem der Abb. 9 in ein Zweimassensystem durch Wegnahme der mittleren Schwungmassen.

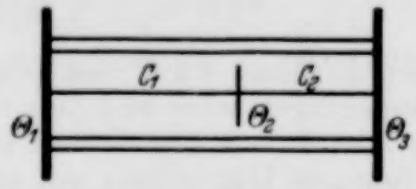

Abb. 12. Übergang vom Dreimassensystem der Abb. 9 in ein Zweimassensystem durch starre Verbindung der beiden äußeren Schwungmassen miteinander.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zurück zu (44) und erhalten durch Bildung totaler Differentiale

$$d(\omega_1^2) + d(\omega_2^2) = \left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) dc_1 + \left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right) dc_2 - \frac{c_1}{\Theta_1^2}\, d\Theta_1 - \frac{c_1 + c_2}{\Theta_2^2}\, d\Theta_2 - \frac{c_2}{\Theta_3^2}\, d\Theta_3 . \tag{60}$$

Andererseits wollen wir (45) einer logarithmischen Differentiation unterziehen; dann folgt

$$\frac{d(\omega_1^2)}{\omega_1^2} + \frac{d(\omega_2^2)}{\omega_2^2} = \frac{dc_1}{c_1} + \frac{dc_2}{c_2} - \frac{\Theta_2 + \Theta_3}{\Theta_1(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)}\, d\Theta_1 - \frac{\Theta_3 + \Theta_1}{\Theta_2(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)}\, d\Theta_2 - \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_3(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)}\, d\Theta_3 . \tag{61}$$

Durch Auflösung nach den Differentialen der beiden Frequenzquadrate ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} d(\omega_1^2) = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \Big\{ & \left[\frac{1}{c_1} - \left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right)\frac{1}{\omega_2^2}\right] dc_1 + \left[\frac{1}{c_2} - \left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right)\frac{1}{\omega_2^2}\right] dc_2 \\ & - \left[\frac{\Theta_2 + \Theta_3}{\Theta_1(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)} - \frac{c_1}{\Theta_1^2}\right] d\Theta_2 - \left[\frac{\Theta_3 + \Theta_1}{\Theta_2(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)} - \frac{c_1 + c_2}{\Theta_2^2}\right] d\Theta_2 \\ & - \left[\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_3(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)} - \frac{c_2}{\Theta_3^2}\right] d\Theta_3 \Big\}, \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} d(\omega_2^2) = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \Big\{ & \left[\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right)\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{c_1}\right] dc_1 + \left[\left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3}\right)\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{c_2}\right] dc_2 \\ & - \left[\frac{c_1}{\Theta_1^2 \omega_1^2} - \frac{\Theta_2 + \Theta_3}{\Theta_1(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)}\right] d\Theta_1 - \left[\frac{c_1 + c_2}{\Theta_2^2 \omega_1^2} - \frac{\Theta_3 + \Theta_1}{\Theta_2(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)}\right] d\Theta_2 \\ & - \left[\frac{c_2}{\Theta_3^2 \omega_1^2} - \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_3(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)}\right] d\Theta_3 \Big\} . \end{aligned} \tag{63}$$

Wie man an Hand der Ungleichungen (49), (50), (51), (52), (58) und (59) leicht einsieht, sind die Koeffizienten der Differentiale der Federkonstanten stets positiv, jedoch jene der Differentiale der Schwungmassen stets negativ. Damit ist bewiesen, daß die Erhöhung einer der beiden Federkonstanten oder eine Abminderung irgend einer der drei Schwungmassen jede der beiden Eigenfrequenzen erhöht (durch zahlenmäßige Berechnung der Koeffizienten kann man sich außerdem einen Überblick über die Wirkung einzelner Steifigkeits- oder Massenänderungen auf die Eigenfrequenzen des Systems verschaffen). Damit ist der als Satz 3 bezeichnete Sachverhalt auch für das Dreimassensystem nachgewiesen. In ähnlicher Weise läßt sich der Beweis auch für Systeme mit noch höheren Massenzahlen durchführen. Der Verfasser beabsichtigt, noch eine allgemeinere Beweisführung im Anschluß an algebraische Hilfssätze an anderer Stelle nachzuholen.

Nachdem nunmehr die Gültigkeit des Satzes 3 für Systeme mit beliebig vielen Massen vorausgesetzt werden darf, ist es ohne weiteres möglich, Gesetzmäßigkeiten für die Aufstellung oberer und unterer Grenzwerte der sämtlichen Eigenfrequenzen anzugeben. Die nachstehenden beiden Sätze ergeben sich sinngemäß aus Satz 3, wenn die Steifigkeitserhöhung einerseits bis zur Erstarrung, andererseits die Steifigkeitsabminderung bis zur Auflösung der elastischen Bindung gesteigert wird:

Satz 4: Durch Erstarrung von t Wellenabschnitten entsteht ein neues Drehschwingungssystem, für welches jede seiner $n-t-1$-Eigenfrequenzen (der Größe nach geordnet) größer ist als die entsprechende Eigenfrequenz des Ausgangssystems, d. h. es gilt, wenn die neuen Frequenzen wieder durch einen Querstrich gekennzeichnet werden,

$$\bar{\omega}_1 > \omega_1; \quad \bar{\omega}_2 > \omega_2; \quad \ldots \bar{\omega}_{n-t} > \omega_{n-t}; \quad \bar{\omega}_{n-t+1} = \bar{\omega}_{n-t+2} = \cdots = \bar{\omega}_{n-1} = \infty. \tag{64}$$

Satz 5: Durch Wegnahme von q benachbarten oder nicht benachbarten Steifigkeiten reduziert sich bzw. zerfällt das Ausgangssystem in zwei oder mehr Teilsysteme. Werden sämtliche neuen Frequenzen wieder der Größe nach geordnet, so gilt

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \cdots = \bar{\omega}_q = 0; \quad \bar{\omega}_{q+1} < \omega_{q+1}; \quad \bar{\omega}_{q+2} < \omega_{q+2} \cdots \bar{\omega}_{n-1} < \omega_{n-1}. \tag{65}$$

Mit Anwendung von Satz 4 ist der Frequenzrechner in der Lage, sich durch Vergleichsrechnungen an durch teilweise Erstarrung gebildeten Ersatzsystemen obere Grenzwerte für die Grundfrequenz und die nächst höheren Frequenzen zu verschaffen. Die hierzu erforderliche Rechnung ist infolge der Verstümmelung des Systems wesentlich kürzer als die des Hauptsystems. Andererseits liefern Vergleichsrechnungen an Ersatzsystemen, die durch Wegnahme einzelner Wellenteile entstanden sind, untere Grenzwerte für die höchste und die nächst niedrigeren Frequenzen, wie in Satz 5 dargelegt ist. Da andererseits in (38) und (39) ein unterer Grenzwert für die Grundfrequenz und ein oberer Grenzwert für die höchste Frequenz gegeben waren, lassen sich Grundfrequenz und höchste Frequenz nunmehr bereits eingrenzen. Sind beide Frequenzen mit ausreichender Genauigkeit ermittelt, so lassen sich die zweite und die zweithöchste Frequenz in derselben Weise eingrenzen. An die Stelle der Gleichungen (38) und (39) treten dann die folgenden, welche unmittelbar aus (29) und (30) abgelesen werden können:

$$\omega_{n-2}^{*\,2} = \omega_{n-1}^{*\,2} - \omega_{n-1}^2 > \omega_{n-2}^2, \tag{66}$$

$$\frac{1}{\omega_2^{*\,2}} = \frac{1}{\omega_1^{*\,2}} - \frac{1}{\omega_1^2} > \frac{1}{\omega_2^2}. \tag{67}$$

Damit sind ein unterer Grenzwert für die zweite und ein oberer Grenzwert für die zweithöchste Frequenz bekannt. Die Eingrenzung nach der anderen Seite ergibt sich wieder aus den Sätzen 4 und 5.

Nach dieser Methode ergeben sich eine Reihe guter Näherungswerte, sowie wichtige Kontrollen für die numerische Rechnung.

7. Zusammenfassung. Durch Verwendung der elastischen Momente anstelle der Schwingungsausschläge als Unbekannte ergibt sich eine $(n-1)$-reihige Determinante, deren Auflösung auf eine Gleichung $(n-1)$-ten Grades für das Frequenzquadrat führt. Die Untersuchung der Koeffizienten dieser Gleichung führt zur Erkenntnis besonderer Gesetzmäßigkeiten der Eigenfrequenzen, aus denen einfache Verfahren zur Berechnung oberer und unterer Grenzwerte der einzelnen Frequenzen gewonnen werden.

(Eingegangen am 24. Oktober 1953.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *H. Neuber*, Dresden-A 27, Westendstr. 23.

Turbulente Strömungen in divergenten Kanälen.

(Mittlerer und starker Druckanstieg.)

Von W. Szablewski.

1. Einleitung. Das Verfahren von *v. Kármán* und *Pohlhausen* zur Berechnung laminarer Grenzschichtströmungen arbeitet bekanntlich mit einem Polynomansatz, der die Wandbindungen erfüllt und dem noch äußere Randbedingungen auferlegt werden. Ein analoges Verfahren für turbulente Grenzschichten ist bisher nicht entwickelt worden. Ein Arbeiten mit einem Polynomansatz ist, wie man heute weiß, hier nicht möglich, da der analytische Charakter der Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichten anders beschaffen ist (man denke z. B. an das logarithmische Gesetz für die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe).

Es hat sich jedoch in den bisherigen, auf der Grundlage der *Prandtl*schen Mischungsweghypothese basierenden Untersuchungen des Verfassers [1] über einige wichtige Modelle der Mechanik turbulenter Strömungen gezeigt, daß man auch hier zu brauchbaren Funktionsansätzen für die Approximation der Geschwindigkeitsverteilung gelangen kann. Für turbulente Grenzschichten mit starkem oder mittlerem Druckabfall erweist sich, wie die Analyse der konvergenten Kanalströmungen ergab, das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz als ein sehr brauchbares Mittel der Approximation. Auch bei schwachem Druckabfall, wie z. B. bei Rohrströmungen, leistet dieses Gesetz bekanntlich gute Dienste [2]. Man erzielt jedoch bei schwachem Druckabfall der Strömung bessere Ergebnisse, wenn man das in einem ersten Integrationsschritt von der Wand her aus der Annahme konstanter Schubspannung zu gewinnende logarithmische Gesetz in einem zweiten Integrationsschritt erweitert. Das gab — vgl. die Untersuchungen des Verfassers [3] über die turbulente Strömung im Rohr und längs der ebenen Platte — ein zusätzliches, in der Variablen des Wandabstandes lineares Glied.

Die vorliegende Untersuchung der turbulenten Strömungen in divergenten Kanälen, die vom Typ turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg sind, wird erweisen, daß man auch in diesem technisch besonders wichtigen und interessierenden Fall auf der Grundlage der *Prandtl*schen Hypothese durch analytische Entwicklung von der Wand her zu Funktionsansätzen gelangen kann, die eine gute Approximation der Geschwindigkeitsverteilung über der Grenzschichtbreite ermöglichen.

2. Das Wandgesetz turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg. Im folgenden gebrauchen wir die üblichen Bezeichnungen: x Bogenlänge der Körperkontur, y Wandabstand, δ Grenzschichtdicke, u, v Geschwindigkeitskomponenten in x, y-Richtung, ϱ Dichte, μ Zähigkeit, $\nu = \mu/\varrho$ kinematische Zähigkeit, $p(x)$ statischer Druck, τ Schubspannung.

Wir erinnern zunächst an die Herleitung des bekannten logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes [4]. Vernachlässigt man für eine wandnahe Zone der Grenzschicht die Trägheitskräfte gegenüber den Druck- und Reibungskräften, so reduziert sich die Bewegungsgleichung der Grenzschichtströmung auf

$$-\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 .$$

Integration ergibt

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y \qquad (\tau_0 \text{ Wandschubspannung}) . \tag{1}$$

Hierbei ist

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb}$$

mit

$$\tau_{lam} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

[1] *W. Szablewski*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 131; ebenda 31 (1951), S. 309; Ing.-Arch. 20 (1952), S. 37.

[2] *L. Prandtl*, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, IV. Lfg. (1932), S. 18.

[3] *W. Szablewski*, a. a. O.

[4] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 37.

und bei Zugrundelegung des *Prandtl*schen Ansatzes

$$\tau_{turb} = \varrho\, l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

wo l den Mischungsweg bedeutet. Unter der Voraussetzung $\tau_0 \neq 0$ kann man für hinreichend kleine y auch noch den Einfluß des Druckgradienten vernachlässigen und erhält

$$\tau \approx \tau_0 \qquad (\tau_0 \neq 0)\,. \tag{2}$$

Die Integration von (2) läßt sich, wenn man noch mit der Dicke δ_0 der laminaren Unterschicht $l = \varkappa\,(y - \delta_0)$ setzt, unschwer durchführen und ergibt für „nicht zu kleine" y (mathematisch in der Asymptote) das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz

$$\varphi = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln \eta + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-1 + \ln\left(4\,\varkappa\, Re_\delta \sqrt{c_1}\right) + \varkappa \frac{v_* \delta_0}{\nu}\right] \qquad \text{für} \qquad \frac{1}{2\,\varkappa\, Re_\delta \sqrt{c_1}} \ll \eta \ll 1\,. \tag{3}$$

Hierbei bedeuten $\eta = y/\delta$, $v_* = \sqrt{\tau_0/\varrho}$ und, mit der Geschwindigkeit u_1 der Potentialströmung am Rande der Grenzschicht, $\varphi = u/u_1$, $Re_\delta = u_1\,\delta/\nu$ sowie $c_1 = \tau_0/\varrho\, u_1^2$.

Dieses Gesetz kann man bekanntlich auch in einfacher Weise direkt erhalten, wenn man in (2) die laminare Reibung gegenüber der turbulenten Reibung vernachlässigt. Allerdings bleibt dann die Integrationskonstante unbestimmt.

Die physikalische Existenz des logarithmischen Gesetzes ist experimentell für einen weiten Bereich turbulenter Grenzschichtströmungen, angefangen mit Strömungen unter Druckabfall bis zu Strömungen mit Druckanstieg, einwandfrei sicher gestellt[1]. Für turbulente Grenzschichten mit starkem Druckanstieg und insbesondere in der Nähe der Ablösungsstelle wird man jedoch der analytischen Beschreibung der Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe die vollständigere Gleichung (1) zugrunde legen müssen. Man ersieht das unmittelbar aus (1), wenn man beachtet, daß bei einer Grenzschichtströmung gegen wachsenden Druckanstieg, der schließlich die Ablösung erzwingt, dem ansteigenden Verlauf des Druckgradienten ein monoton fallender Verlauf der Wandschubspannung τ_0 bis zur Ablösungsstelle $\tau_0 = 0$ gegenübersteht.

Die Integration von (1) mit

$$\tau_{lam} + \tau_{turb} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \varrho\, l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

läßt sich nun leider nicht, im Gegensatz zu (2), mit elementaren Funktionen durchführen und erfordert die Berechnung elliptischer Integrale. Enthält die betrachtete wandnahe Zone jedoch eine Schicht, für die die laminare Reibung gegenüber der turbulenten Reibung vernachlässigbar ist [2], so läßt sich für diese Schicht die Integration leicht durchführen. Es bleibt dann allerdings, wie im analogen Fall des logarithmischen Gesetzes, die Integrationskonstante unbestimmt. Wir werden hier die Integrationskonstante approximativ aus einer einschränkenden Annahme ableiten. Ihre vollständige Bestimmung behalten wir einer späteren Arbeit vor.

Bei Vernachlässigung der laminaren Reibung ergibt (1)

$$\left(\frac{l}{\delta}\right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 = c_1 - \frac{\lambda}{2}\eta \qquad \left(\lambda = \frac{-(dp/dx)\,\delta}{(\varrho/2)\,u_1^2}\right). \tag{4}$$

Mit $l = \varkappa\,\eta$ kommt

$$\varphi = \frac{1}{\varkappa} \int^{\eta} \frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/2)\,\eta}}{\eta}\, d\eta\,, \tag{5}$$

was auf

$$\varphi = \frac{2}{\varkappa}\sqrt{c_1 - (\lambda/2)\eta} + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln \frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/2)\,\eta} - \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1 - (\lambda/2)\,\eta} + \sqrt{c_1}} + \text{konst} \tag{6}$$

führt.

Wir bestimmen nun die Integrationskonstante durch die Forderung, daß wir für $\eta \to 0$ wieder das log. Gesetz erhalten. Diese Forderung ist physikalisch so zu verstehen: Gehen wir bei einer Grenzschichtströmung in den Bereich mit Druckanstieg hinein, so werden wir uns zunächst noch im Geltungsbereich des log. Gesetzes befinden, für eine wandnahe Schicht also

---

[1] *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 244.

[2] Die Existenz einer solchen Schicht ist nach den obigen Ausführungen im Geltungsbereich des logarithmischen Gesetzes experimentell nachgewiesen.

im Gleichgewicht der Kräfte den Druckgradienten gegenüber den Reibungskräften noch vernachlässigen können. Mit wachsendem Druckanstieg (und gleichzeitig fallender Wandschubspannung), greift nach (1) der Druckgradient immer weiter zur Wand hin bestimmend in das Gleichgewicht der Kräfte ein und engt die Schicht des log. Gesetzes immer mehr ein, um dieses Gesetz schließlich aufzuheben. Die obige Forderung besagt dann, daß wir unsere Betrachtung auf nicht zu großen Druckanstieg beschränken, bei dem das log. Gesetz noch nicht vollständig aufgehoben ist. Für stärkeren Druckanstieg, insbesondere in der Nähe der Ablösungsstelle ($\tau_0 = 0$), werden wir diese Einschränkung nicht mehr treffen können.

Beachtet man, daß

$$\sqrt{c_1 - (\lambda/2)\,\eta} \approx \sqrt{c_1}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda/2}{c_1}\,\eta\right) \qquad \text{für kleine } \eta\,,$$

so kommt

$$\varphi \approx 2\,\frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\ln\frac{1}{4}\,\frac{(-\lambda/2)}{c_1}\,\eta + \text{konst} \qquad \text{für kleine } \eta\,.$$

Die Forderung, daß für kleine η wieder das log. Gesetz (3) erscheint, ergibt dann für die Integrationskonstante

$$\text{konst} = -\,2\,\frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\ln 4\,\frac{c_1}{(-\lambda/2)} + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-\,1 + \ln\left(4\,\varkappa\,Re_\delta\sqrt{c_1}\right) + \varkappa\,\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right]. \tag{7}$$

Damit lautet die von uns abgeleitete Form des Wandgesetzes

$$\left.\begin{aligned}\varphi = \frac{2}{\varkappa}\left(\sqrt{c_1 - (\lambda/2)\,\eta} - \sqrt{c_1}\right) + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\ln 4\,\frac{c_1}{(-\lambda/2)}\,\frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/2)\,\eta} - \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1 - (\lambda/2)\,\eta} + \sqrt{c_1}}\\ + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-\,1 + \ln\left(4\,\varkappa\,Re_\delta\sqrt{c_1}\right) + \varkappa\,\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right]\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

für

$$\frac{1}{2\,\varkappa\,Re_\delta\sqrt{c_1}} \ll \eta \ll 1\,.$$

In *Prandtl*schen Koordinaten

$$\frac{u}{v_*} = \frac{\varphi}{\sqrt{c_1}} \qquad \text{und} \qquad \frac{v_*\,y}{\nu} = Re_\delta\sqrt{c_1}\,\eta$$

lautet unser Ergebnis

$$\left.\begin{aligned}\frac{u}{v^*} = \frac{2}{\varkappa}\left(\sqrt{1 + F\,\frac{v_*\,y}{\nu}} - 1\right) + \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{4}{F}\,\frac{\sqrt{1 + F\,\frac{v_*\,y}{\nu}} - 1}{\sqrt{1 + F\,\frac{v_*\,y}{\nu}} + 1} + \frac{1}{\varkappa}\left[-\,1 + \ln 4\,\varkappa + \varkappa\,\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right]\\ \text{mit}\qquad F = \frac{1}{Re_\delta\sqrt{c_1}}\,\frac{(-\lambda/2)}{c_1} = \frac{\nu}{v_*}\,\frac{dp/dx}{\varrho\,v_*^2}\,, \qquad \text{Schicht } \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varkappa} \ll \frac{v_*\,y}{\nu} \ll Re_\delta\sqrt{c_1}\,.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Empirische Koeffizienten dieses Gesetzes sind, nach dem derzeitigen Stand der Theorie, die Koeffizienten $\varkappa$ und $v_*\,\delta_0/\nu$. Das sind die empirischen Koeffizienten des log. Gesetzes. Sie hängen von der *Reynolds*schen Zahl des Strömungsmodells ab, sind aber vom Druckgradienten der Strömung unabhängig. Für große *Re*-Zahlen nehmen sie den Charakter universeller Konstanten an [1].

3. Verlauf der Wandschubspannungen in den Nikuradseschen Messungen. Zum Vergleich der Theorie mit dem Experiment ziehen wir die bekannten Messungen von *Nikuradse* [2] heran. Bezüglich der bei der Untersuchung der ebenen Diffusorströmung verwendeten Symbole siehe Einleitung zu Abschnitt 4.

Hier standen wir zunächst vor einer gewissen Schwierigkeit. Die von *Nikuradse* angegebenen Wandschubspannungen weisen einen unregelmäßigen Verlauf auf, insbesondere zeigen sie auch das seinerzeit viel diskutierte Anwachsen kurz vor dem Abfall auf Null. Dieses unwahrschein-

---

[1] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 37.

[2] *J. Nikuradse*, Untersuchungen über die Strömung des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen, VDI-Forschungsheft 289 (1929).

liche Verhalten der angegebenen Wandschubspannungen ist inzwischen als durch Fehler bedingt erkannt worden [1]. Zur Erklärung hat man das Auftreten von Sekundärströmungen, durch welche die Zweidimensionalität der Strömung zerstört wird, herangezogen. Wir weisen hier auf folgende rein numerische Fehlerquelle hin:

Nikuradse hat die Wandschubspannung τ_0 mittels des Impulssatzes [2]

$$c_1 = \frac{\lambda}{4} + \operatorname{tg}\alpha \int_0^1 \varphi^2 \, d\eta$$

aus der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung und dem gemessenen Druckgradienten berechnet. Numerisch heißt das aber, wenigstens im Bereich stärkeren Druckanstieges, als kleine Differenz großer Zahlen, was bekanntlich immer eine mißliche Angelegenheit ist und zwanglos den streuenden Verlauf der angegebenen Wandschubspannungen erklärt.

In einfacher und sicherer Weise kann man nun die Wandschubspannungen aus der experimentellen Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe mittels unseres Wandgesetzes bestimmen, falls die empirischen Koeffizienten $\varkappa$, $v_* \delta_0/\nu$ desselben bekannt sind. Das ist hier der Fall! $\varkappa$ und $v_* \delta_0/\nu$ sind, wie oben erwähnt, vom Druckgradienten der Strömung unabhängig und können hier bei der mittleren *Reynolds*schen Zahl $Re = u_1 b/\nu \approx 81\,500$ der Messung der konvergenten Kanalströmungen entnommen werden, die bei der nur wenig verschiedenen mittleren Zahl $Re \approx 67\,500$ durchgeführt wurden. Dort hatten wir gefunden

$$\varkappa = 0{,}6\,, \qquad \frac{v_* \delta_0}{\nu} = 9{,}5\,.$$

(Es ist zu bemerken, daß die *Nikuradse*schen Messungen bei einer verhältnismäßig kleinen *Reynolds*schen Zahl durchgeführt wurden. Für große *Re*-Zahlen, wie sie für die technische Praxis besonders interessant sind, haben wir ungefähr [3]

$$\varkappa = 0{,}4\,, \qquad \frac{v_* \delta_0}{\nu} = 5{,}5$$

zu erwarten.)

Unter Zugrundelegung des Wandgesetzes in der Form (10) haben wir bei Benutzung der von *Nikuradse* gemessenen Druckgradienten mit folgenden Werten der Wandschubspannung ein Zusammenfallen der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung mit der Kurve des Wandgesetzes erreicht (Abb. 1):

α	c_1
1°	0,00137
2°	0,00102
3°	0,00075
4°	0,00042

Die so ermittelten Wandschubspannungen zeigen einen regelmäßigen, mit wachsendem Druckanstieg monoton fallenden Verlauf (Abb. 2). Sie werden bei Zugrundelegung des vollständigen Wandgesetzes noch etwas korrigiert werden müssen.

Auffallend ist, über ein wie weites Intervall die experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen durch das Wandgesetz brauchbar approximiert werden. Gestrichelt eingetragen ist das logarithmische Gesetz. Man sieht sehr schön, wie die Schicht desselben mit wachsendem Druckanstieg immer weiter eingeengt wird.

4. Berechnung der ebenen Diffusorströmung in erster Näherung. Man kann aus Abb. 1 schon die Vermutung entnehmen, daß wir brauchbare Ergebnisse erhalten werden, wenn wir die Geschwindigkeitsverteilung über der gesamten Breite der Grenzschichtströmung durch das Wandgesetz approximieren.

Es bedeuten im folgenden: b Kanalbreite, α halber Öffnungswinkel des ebenen Diffusors, u_1 Geschwindigkeit in Kanalachse.

---

[1] Vgl. *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, a. a. O.
[2] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 37.
[3] *W. Szablewski*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 309.

Mit $\eta = \frac{y}{b/2}$, $\lambda = \frac{-(dp/dx\, b)}{(\varrho/2)\, u_1^2}$ und $Re = \frac{u_1 b}{\nu}$

lautet dann nach (8) das Wandgesetz

$$\varphi = 2\left(\frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta}}{\varkappa} - \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\right) + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln 4 \frac{c_1}{(-\lambda/4)} \frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta} - \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta} + \sqrt{c_1}} + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-1 + \ln\left(2\varkappa Re \sqrt{c_1}\right) + \varkappa \frac{v_* \delta_0}{\nu}\right]. \tag{10}$$

Nach Abschn. 3 haben wir für $Re = 81500$ $\varkappa = 0{,}6$, $\frac{v_* \delta_0}{\nu} = 9{,}5$.

Es verbleiben dann in der Funktion (10) noch die beiden unbestimmten Parameter c_1 und λ. Zu ihrer Bestimmung ziehen wir den Impulssatz und die äußere Randbedingung $\varphi = 1$ für $\eta = 1$ heran.

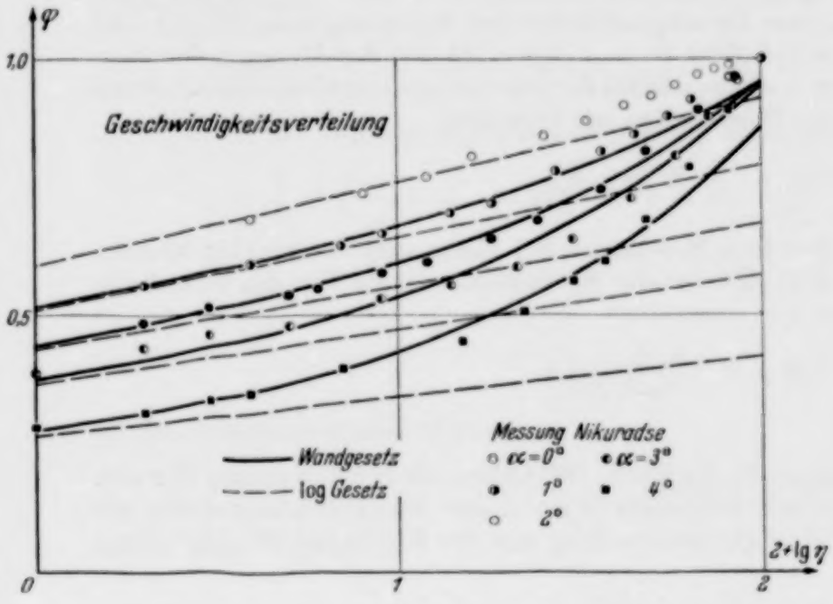

Abb. 1.

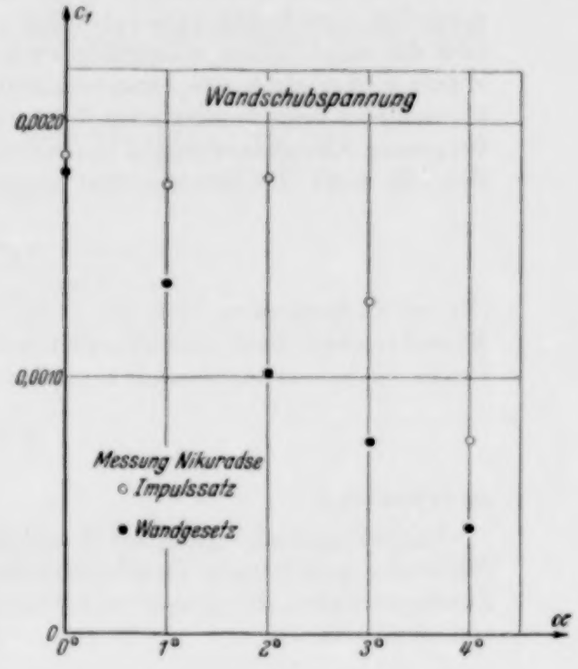

Abb. 2.

a) Randbedingung $\varphi = 1$ für $\eta = 1$. Die Randbedingung ergibt nach (10)

$$1 = 2\left(\frac{\sqrt{c_1 - \lambda/4}}{\varkappa} - \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\right) + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln 4 \frac{c_1}{(-\lambda/4)} \frac{\sqrt{c_1 - \lambda/4} - \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1 - \lambda/4} + \sqrt{c_1}} + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-1 + \ln\left(2\varkappa Re \sqrt{c_1}\right) + \varkappa \frac{v_* \delta_0}{\nu}\right]. \tag{11}$$

Wir können dann für φ auch schreiben

$$\varphi = 1 + 2\left(\frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta}}{\varkappa} - \frac{\sqrt{c_1 - \lambda/4}}{\varkappa}\right) + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln \left\langle \frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta} - \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta} + \sqrt{c_1}} \frac{\sqrt{c_1 - \lambda/4} + \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1 - \lambda/4} - \sqrt{c_1}} \right\rangle. \tag{12}$$

b) Impulssatz. Der Impulssatz lautet

$$c_1 = \frac{\lambda}{4} + \operatorname{tg}\alpha \int_0^1 \varphi^2\, d\eta\,. \tag{13}$$

Für φ^2 erhalten wir aus (12)

$$\varphi^2 = 1 + 4\left(\frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta}}{\varkappa} - \frac{\sqrt{c_1 - \lambda/4}}{\varkappa}\right) + 2\frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln\langle\cdots\rangle + 4\left(\frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta}}{\varkappa} - \frac{\sqrt{c_1 - \lambda/4}}{\varkappa}\right)^2 + 4\frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left(\frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta}}{\varkappa} - \frac{\sqrt{c_1 - \lambda/4}}{\varkappa}\right) \ln\langle\cdots\rangle + \frac{c_1}{\varkappa^2} \ln^2\langle\cdots\rangle\,. \tag{14}$$

Bei der Integration vernachlässigen wir das Glied $c_1/\varkappa^2 \ln^2 \langle \cdots \rangle$, das für große *Re*-Zahlen von höherer Größenordnung klein ist [1]. Mit den Abkürzungen $\beta = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}$, $\gamma = \frac{-\lambda/4}{\varkappa^2}$ ergibt dann die Integration

$$\int_0^1 \varphi^2 \, d\eta = 1 + [(\beta^2+\gamma)^{1/2} - \beta]\, 4\frac{\beta^2}{\gamma}[-1 + 2(\beta^2+\gamma)^{1/2}]$$
$$+ [(\beta^2+\gamma)^{3/2} - \beta^3]\frac{8}{3}\frac{1}{\gamma}[1 - 2(\beta^2+\gamma)^{1/2}] + [(\beta^2+\gamma)^2 - \beta^4]\frac{2}{\gamma}$$
$$- 4(\beta^2+\gamma)^{1/2} + 4(\beta^2+\gamma) - \frac{8}{3}\beta^2 - \frac{8}{3}\frac{\beta^4}{\gamma}\ln\frac{1}{4}\frac{\gamma}{\beta^2}\frac{(\beta^2+\gamma)^{1/2}+\beta}{(\beta^2+\gamma)^{1/2}-\beta}. \qquad (15)$$

Gleichung (11) schreibt sich mit den obigen Abkürzungen

$$1 = 2[(\beta^2+\gamma)^{1/2} - \beta] + \beta \ln 4\frac{\beta^2}{\gamma}\frac{(\beta^2+\gamma)^{1/2}-\beta}{(\beta^2+\gamma)^{1/2}+\beta} + \beta\left[-1 + \ln(2\varkappa^2 Re\,\beta) + \varkappa\frac{v_* \delta_0}{\nu}\right]. \qquad (16)$$

c) Druckanstieg und Wandschubspannung. Die beiden Gleichungen (13) und (16) lassen sich leicht approximativ lösen. Wir sind so vorgegangen, daß wir aus (16) die zu vorgegebenen λ bzw. γ zugehörigen c_1 bzw. β mittels graphischer Methoden bestimmten; das gibt eine Kurve c_1 über λ. Aus (15) kann man dann unter Benutzung der obigen Ermittlung die Kurve tg α über λ nach der Formel (13) $\operatorname{tg}\alpha = (c_1 - \lambda/4)\Big/\int_0^1 \varphi^2\, d\eta$ berechnen. Wir erhielten für den Druckanstieg und die Wandschubspannung

α	λ_{theor}	λ_{exp}	α	$c_{1\,theor}$	$c_{1\,exp}$
1°	−0,047	−0,043	1°	0,00149	0,00137
2°	−0,092	−0,085	2°	0,00109	0,00102
3°	−0,133	−0,120	3°	0,00082	0,00075
4°	−0,170	$-0{,}140_5$	4°	0,00062	0,00042

Vgl. ferner Abb. 5 und Abb. 6. Die Übereinstimmung ist als brauchbar anzusehen. Mit wachsendem Druckanstieg werden die Abweichungen der theoretischen von den experimentellen Werten größer. Hierzu ist zu bemerken, daß die von uns abgeleitete Form des Wandgesetzes ausdrücklich auf nicht zu starken Druckanstieg beschränkt ist (vgl. Abschn. 2).

d) Geschwindigkeitsverteilung und Verdrängungsdicke. Die experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen werden für mittleren Druckanstieg ebenfalls brauchbar wiedergegeben (Abb. 3). Für stärkeren Druckanstieg wird die Wiedergabe schlechter (Abb. 8). Dabei wurden die theoretischen Verteilungen nach (12) mit den oben ermittelten theoretischen Werten für c_1 und λ berechnet.

Entsprechend liegen die Dinge hinsichtlich der Verdrängungsdicke. Für

$$\frac{\delta_1}{b/2} = \int_0^1 (1-\varphi)\, d\eta$$

kommt mit (12)

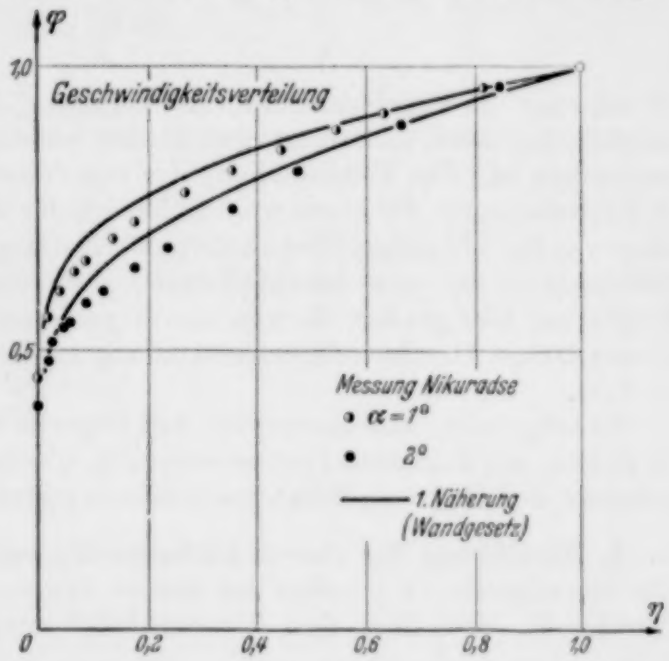

Abb. 3.

$$\frac{\delta_1}{b/2} = -\frac{4}{3}\frac{\varkappa^2}{(-\lambda/4)}\left[\left(\frac{\sqrt{c_1 - \lambda/4}}{\varkappa}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\right)^3\right] + 2\frac{\sqrt{c_1-\lambda/4}}{\varkappa} + 2\frac{\varkappa^2}{(-\lambda/4)}\frac{c_1}{\varkappa^2}\left(\frac{\sqrt{c_1-\lambda/4}}{\varkappa} - \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\right). \qquad (17)$$

[1] Aus (11) folgt für große *Re* $\sqrt{c_1}/\varkappa \sim \varepsilon$, ε kleine Zahl ($\sim$ Größenordnung). Gleichung (13) ergibt $-\lambda/4 \sim \operatorname{tg}\alpha$ für große *Re*.

α	$\left(\frac{\delta_1}{b/2}\right)_{theor}$	$\left(\frac{\delta_1}{b/2}\right)_{exp}$ [1]
1°	0,138	0,151
2°	0,179	0,198
3°	0,210	0,245
4°	0,234	0,309

Vgl. ferner Abb. 10.

5. Der Koeffizient $\mu^*/\varkappa$ der Mischungswegverteilung. Um zu einer besseren Approximation für starken Druckanstieg zu gelangen, werden wir die Integration der Grenzschichtdifferentialgleichung in einem zweiten Schritt weiter ins Innere der Grenzschicht hinein fortsetzen. In diesem zweiten Schritt werden wir die bisher vernachlässigten Trägheitskräfte in erster Näherung erfassen, was aus Gründen der Größenordnung wiederum erfordert, den Vorgang der turbulenten Mischung nunmehr auch in zweiter Näherung zu berücksichtigen gemäß dem Ansatz

$$\frac{l}{b/2} \approx \varkappa\,\eta + \mu^*\,\eta^2 = \varkappa\,\eta\left(1 + \frac{\mu^*}{\varkappa}\,\eta\right). \tag{18}$$

Es wird also das zweite Glied in der *Taylor*entwicklung der Mischungswegfunktion berücksichtigt[2]. *Nikuradse*[3] hat die Mischungswegverteilung mittels der *Prandtl*schen Hypothese $\tau = \varrho\, l^2\,(\partial u/\partial y)^2$ aus der experimentellen Geschwindigkeitsverteilung und der (mit Hilfe des Impulssatzes gewonnenen) Schubspannungsverteilung bestimmt, wobei graphische Differentiation zur Anwendung kam. Dieses Verfahren ist, insbesondere in Wandnähe, mit Unsicherheiten behaftet. Hinzu kommt die schon erörterte Schwierigkeit der Ermittlung der Schubspannung in Wandnähe (vgl. Abschn. 3).

Wir haben die von *Nikuradse* berechneten Werte der Mischungswegverteilung nach der Formel

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{l}{\frac{b}{2}\varkappa\,\eta} - 1\right) = \frac{\mu^*}{\varkappa} + \cdots \tag{19}$$

mit $\varkappa = 0{,}6$ ausgewertet (Abb. 4). Die Werte in Wandnähe streuen erwartungsgemäß sehr stark und wurden aus der graphischen Darstellung fortgelassen. Es ergibt sich einigermaßen deutlich die wichtige Feststellung, daß $\mu^*/\varkappa$ vom Druckgradienten der Strömung unabhängig ist:

$$\frac{\mu^*}{\varkappa} \approx -1{,}2\,.$$

Wenn man die Ergebnisse der vom Verfasser[4] durchgeführten Analysen anderer Strömungsmodelle beachtet, so kommt man zu der Annahme, daß $\mu^*/\varkappa$ sogar als universelle Konstante anzusehen ist. Die Untersuchung der von *Nikuradse*[5] durchgeführten Messungen turbulenter Rohrströmungen, die einen weiten Bereich der *Reynolds*schen Modellzahl bedecken, ergab aus einer von *Prandtl* aufgestellten Interpolationsformel für die Mischungswegverteilung $\mu^*/\varkappa = -1{,}1$, Die Analyse der von *Schultz-Grunow*[6] gemessenen turbulenten Strömung längs der ebenen Platte bei sehr großen Werten der *Reynolds*schen Modellzahl ergab durch Angleichung der theoretischen Geschwindigkeitsverteilung an die experimentellen Werte in Wandnähe $\mu^*/\varkappa = -1{,}33$.

Es möge noch bemerkt werden, daß folgende Hypothese nahe liegt: „Setzt man $l/\delta = \varkappa f(\eta)$, so besitzt die Funktion $f(\eta)$ universellen Charakter". Jedenfalls kann man aus Abb. 4 entnehmen, daß $f(\eta)$ vom Druckgradienten der Strömung unabhängig ist.

6. Berechnung der ebenen Diffusorströmung in zweiter Näherung. Wir gehen nun daran, das Wandgesetz (10) weiter ins Innere der Grenzschichtströmung hinein fortzusetzen (vgl. Abschn. 5). Die über den Wandabstand integrierte Grenzschichtdifferentialgleichung der

---

[1] Die hier angegebenen Werte wurden von uns aus den von *Nikuradse* gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen graphisch ermittelt. Die von *Nikuradse* angegebenen Werte sind z. T. fehlerhaft.

[2] Wir verwenden hier die Bezeichnung μ^*, um Verwechslungen mit der Zähigkeit μ auszuschließen.

[3] *J. Nikuradse*, a. a. O.

[4] *W. Szablewski*, a. a. O.

[5] *J. Nikuradse*, Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren, VDI-Forschungsheft 356 (1932).

[6] *F. Schultz-Grunow*, Luftfahrtforschung 17 (1940), S. 239.

ebenen turbulenten Kanalströmungen lautet[1] bei Vernachlässigung der laminaren Reibung

$$\frac{\lambda}{4}\eta + \left(\frac{l}{b/2}\right)^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 = c_1 - \operatorname{tg}\alpha \int_0^\eta \varphi^2 \, d\eta \,. \tag{20}$$

Formale Integration ergibt

$$\varphi = \int^{\varphi} \frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta - \operatorname{tg}\alpha \int_0^\eta \varphi^2 \, d\eta}}{\frac{l}{b/2}} \, d\eta \,. \tag{21}$$

Für $\frac{l}{b/2}$ nehmen wir an

$$\frac{l}{b/2} \approx \varkappa \eta \left(1 + \frac{\mu^*}{\varkappa}\eta\right).$$

Unter Beschränkung auf kleine[2] η wollen wir folgende Linearisierungen zulassen:

$$\frac{1}{\varkappa \eta \left(1 + \frac{\mu^*}{\varkappa}\,\eta\right)} \approx \frac{1}{\varkappa \eta}\left(1 - \frac{\mu^*}{\varkappa}\eta\right), \tag{22}$$

$$\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta - \operatorname{tg}\alpha \int_0^\eta \varphi^2 \, d\eta} \approx \sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta} \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} \frac{\int_0^\eta \varphi^2 \, d\eta}{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta}\right). \tag{23}$$

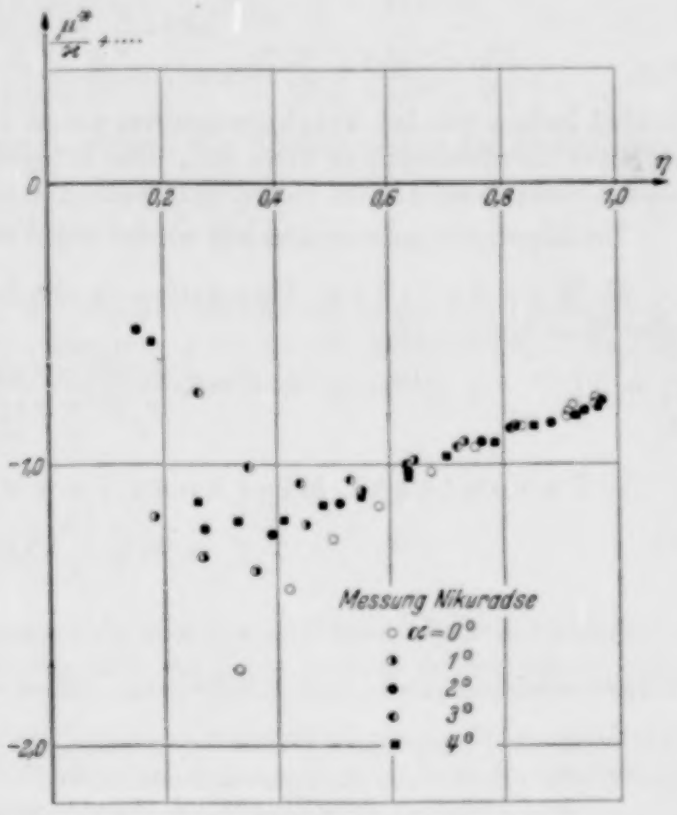

Abb. 4.

Zu der letzteren Linearisierung ist zu bemerken, daß für Druckanstieg $\lambda < 0$ ist. Aus (20) folgt

$$c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta \geq \operatorname{tg}\alpha \int_0^\eta \varphi^2 \, d\eta \,,$$

so daß die Linearisierung in der obigen Form sinnvoll ist[3].

Damit erhalten wir aus (21)

$$\varphi = \int^{\eta} \frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta}}{\varkappa \eta} \left[1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} \frac{\int_0^\eta \varphi^2 \, d\eta}{c_1 - (\lambda/4)\,\eta}\right]\left(1 - \frac{\mu}{\varkappa}\eta\right) d\eta \tag{24}$$

oder

$$\varphi = f_1 + \frac{\mu^*}{\varkappa} f_2 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\varkappa^2} f_3$$

mit

$$f_1 = \int^{\eta} \frac{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta}}{\varkappa \eta} \, d\eta \,,$$

$$f_2 = -\frac{1}{\varkappa} \int_0^\eta \sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta} \, d\eta \,,$$

[1] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 37.

[2] Als untere Grenze der Schicht des Wandgesetzes haben wir in (8) die Bedingung $\eta \gg 1/(\varkappa\, Re \sqrt{c_1})$ angegeben. Diese Zahl konvergiert für $Re \to \infty$ gegen Null, wie man aus (11) schließen kann.

[3] Die beiden vorgenommenen Linearisierungen sowie die noch weiter unten zu treffende Vernachlässigung eines Bestandteils des Trägheitsintegrals, die für kleine η exakte Operationen sind, haben für größere η die Bedeutung einer Mittelwertbildung, da durch sie sowohl Zähler wie Nenner des Integranden in (21) vergrößert werden.

$$f_3 = -\frac{\varkappa}{2}\int_0^\eta \frac{\left(\int_0^\eta \varphi^2\, d\eta\right)}{\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta}}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{\mu}{\varkappa}\right) d\eta$$

$$\approx -\frac{\varkappa}{2}\int_0^\eta \frac{\left(\int_0^\eta \varphi^2\, d\eta\right)}{\eta\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\,\eta}}\, d\eta \qquad \text{für kleine } \eta\,. \tag{25}$$

Dabei haben wir im Trägheitsintegral einen Bestandteil vernachlässigt, der für kleine η von höherer Größenordnung klein ist[1]. Die Integrationskonstante wird so zu wählen sein, daß wir den Anschluß an das im ersten Integrationsschritt (Abschn. 2) erhaltene Wandgesetz erlangen.

Im folgenden gebrauchen wir wieder die Abkürzungen $\beta = \sqrt{c_1}/\varkappa$, $\gamma = -(\lambda/4)/\varkappa^2$.

a) Wandgesetz. Integration ergibt bei passender Wahl der Integrationskonstanten das Wandgesetz (10)

$$f_1 = 2\left[(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} - \beta\right] + \beta \ln 4\,\frac{\beta^2}{\gamma}\,\frac{(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} - \beta}{(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} + \beta} + \beta\left[-1 + \ln\left(2\,\varkappa^2\, Re\,\beta\right) + \varkappa\,\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right]. \tag{26}$$

b) Turbulente Mischung in zweiter Näherung. Man erhält

$$\frac{\mu^*}{\varkappa} f_2 = -\frac{2}{3}\,\frac{\mu^*}{\varkappa}\,\frac{1}{\gamma}\left[(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{3/2} - \beta^3\right]. \tag{27}$$

c) Trägheitskräfte in erster Näherung. Wir erfassen für kleine η die Trägheitswirkungen in erster Näherung, indem wir in das Integral $\int_0^\eta \varphi^2\, d\eta$ mit dem Wandgesetz (10) bzw. (26) eingehen. Das Wandgesetz gibt ja für eine wandnahe Zone (vgl. Abschn. 4) die Geschwindigkeitsverteilung exakt wieder[2].

Für f_1^2 haben wir nach (26), wenn wir noch die Abkürzung $\{\ \} = \{-1 + \ln(2\,\varkappa^2\, Re\,\beta) + \varkappa\, v_*\,\delta_0/\nu\}$ einführen.

$$f_1^2 = \beta^2\{\cdot\cdot\}^2 + 4\,\beta\{\cdot\cdot\}\left[(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} - \beta)\right] + 2\,\beta^2\{\cdot\cdot\}\ln\left\langle 4\,\frac{\beta^2}{\gamma}\,\frac{(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} - \beta}{(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} + \beta}\right\rangle$$
$$+ 4\left[(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} - \beta\right]^2 + 4\,\beta\left[(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} - \beta\right]\ln\langle\cdot\cdot\rangle + \beta^2 \ln^2\langle\cdot\cdot\rangle\,. \tag{28}$$

Hier vernachlässigen wir wieder wie in Abschn. 4 das numerisch belanglose letzte Glied[3], das für große Re von höherer Größenordnung klein ist. Es folgt

$$\int_0^\eta \varphi^2\, d\eta = -4\,\frac{\beta^2}{\gamma}(\{\cdot\cdot\} - 2)\left[(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} - \beta\right] + \frac{8}{3}\,\frac{\beta}{\gamma}(\{\cdot\cdot\} - 2)\left[(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{3/2} - \beta^3\right]$$
$$+ \frac{2}{\gamma}\left[(\beta^2 + \gamma\,\eta)^2 - \beta^4\right] + \beta^2\left[\{\cdot\}(\{\cdot\} - 4) + \frac{4}{3}\right]\eta + 2\,\beta^2(\{\cdot\} - 2)\,\eta \ln 4\,\frac{\beta^2}{\gamma}\,\frac{(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} - \beta}{(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} + \beta}$$
$$+ \frac{8}{3}\,\frac{\beta}{\gamma}\left[(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{3/2} \ln 4\,\frac{\beta^2}{\gamma}\,\frac{(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} - \beta}{(\beta^2 + \gamma\,\eta)^{1/2} + \beta} - \beta^3 \ln\eta\right]. \tag{29}$$

Mit (29) haben wir nun in das Trägheitsintegral

$$\int_0^\eta \frac{\left(\int_0^\eta \varphi^2\, d\eta\right)}{\eta\sqrt{c_1 - (\lambda/4)\eta}}\, d\eta$$

einzugehen.

---

[1] Vgl. Fußnote 3 von S. 275.

[2] Der Fehler, den wir dadurch begehen, daß wir im Integral die Funktion (26) bis zur Wand $\eta = 0$ zur Anwendung bringen, ist vernachlässigbar klein. Das folgt aus der Bemerkung, daß die untere Grenze der Schicht des Wandgesetzes für $Re \to \infty$ gegen Null konvergiert; vgl. Fußnote 2 von S. 275.

[3] Unterwirft man zum Zweck der Abschätzung f_1 nach (26) der Randbedingung $f_1 = 1$ für $\eta = 1$, so folgt, daß für große Re $\beta\,[\ ] \sim 1$ ($\sim$ Größenordnung) sowie $\beta \sim \varepsilon$, ε kleine Zahl. Der Impulssatz (13) ergibt dann $\gamma \sim \operatorname{tg}\alpha$.

Wir geben hier nur das Endergebnis der elementaren, wenn auch etwas mühsamen Rechnung an:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\varkappa^2} f_3 = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\varkappa^2}\frac{1}{\gamma}\left\{\beta^2\left[\{\cdots\}\,(\{\cdots\}-4)+\frac{2}{3}\right][(\beta^2+\gamma\eta)^{1/2}-\beta]\right.$$
$$+\frac{2}{3}[(\beta^2+\gamma\eta)^{3/2}-\beta^3]+\frac{4}{3}\beta\gamma(\{\cdots\}+2)\eta-\frac{8}{3}\beta^3(\{\cdots\}-2)\ln\eta$$
$$\left.+2\beta\left[\beta(\{\cdot\}-2)\left[(\beta^2+\gamma\eta)^{1/2}+\frac{\beta}{3}\right]+\frac{2}{3}\gamma\eta\right]\ln 4\frac{\beta^2}{\gamma}\frac{(\beta^2+\gamma\eta)^{1/2}-\beta}{(\beta^2+\gamma\eta)^{1/2}+\beta}\right\}. \qquad (30)^1$$

d) Wir erhalten also in analytischer Weiterentwicklung des Wandgesetzes die Funktion

$$\varphi = f_1 + \frac{\mu^*}{\varkappa} f_2 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\varkappa^2} f_3 \qquad (31)$$

mit f_1 nach (26), f_2 nach (27) und f_3 nach (30).

Der weitere Rechengang ist wie in Abschn. 4. Wir approximieren durch die Funktion (31) die Geschwindigkeitsverteilung über der ganzen Breite der Grenzschichtströmung. Die Parameter c_1 und λ bestimmen wir wieder mittels der äußeren Randbedingung

$$\varphi = 1 \quad \text{für} \quad \eta = 1 \qquad (32)$$

und des Impulssatzes [vgl. (13)]

$$c_1 - \frac{\lambda}{4} = \operatorname{tg}\alpha \int_0^1 \varphi^2\, d\eta\,. \qquad (33)$$

Die Gleichung (32) der äußeren Randbedingung läßt sich nach (31) analytisch formulieren. Auf eine analytische Formulierung der Gleichung (33) des Impulssatzes haben wir in Anbetracht der Kompliziertheit verzichtet.

Wir haben die beiden Gleichungen (32) und (33) approximativ in folgender Weise gelöst[2]:

1. Für ein vorgegebenes α haben wir aus (32) für eine Reihe von λ-Werten die zugehörigen c_1-Werte graphisch ermittelt; das gibt für ein vorgegebenes α eine Kurve c_1 über λ bzw. $c_1 - \lambda/4$ über λ (Kurve 1).

2. Für das in 1) vorgegebene α haben wir dann zu den in 1) berechneten λ und c_1 (λ)-Werten die Funktion φ nach (31) berechnet und die Integrale $\int_0^1 \varphi^2\, d\eta$ graphisch ermittelt. Das gibt eine Kurve $\operatorname{tg}\alpha \int_0^1 \varphi^2\, d\eta$ über λ (Kurve 2).

3. Der Schnittpunkt der beiden Kurven 1 und 2 bestimmt dann nach (33) das zu dem vorgegebenen α zugehörige λ und c_1.

e) Ergebnisse: 1. Druckanstieg und Wandschubspannung.

α	λ_{theor}	λ_{exp}	α	$c_{1\,theor}$	$c_{1\,exp}$
1°	−0,044	−0,043	1°	0,00134	0,00137
2°	−0,085	−0,085	2°	0,00097	0,00102
3°	−0,119	−0,120	3°	0,00068	0,00075
4°	−0,149	$-0{,}140_5$	4°	$0{,}00046_5$	0,00042

Vgl. hierzu Abb. 5 und Abb. 6, aus denen man auch den Gewinn der zweiten Näherung ersehen kann. Die Übereinstimmung der theoretischen mit den experimentellen Werten ist im ganzen untersuchten Bereich als befriedigend anzusehen.

---

[1] Bei der Integration haben wir den Teil des Trägheitsintegrals, den der letzte Bestandteil von (29) ergibt, näherungsweise mit

$$\frac{8}{3}\frac{\beta}{\varkappa}\int_0^\eta \ln 4\frac{\beta^2}{\gamma}\frac{(\beta^2+\gamma\eta)^{1/2}-\beta}{(\beta^2+\gamma\eta)^{1/2}+\beta}\,d\eta$$

berechnet unter Vernachlässigung des numerisch belanglosen Gliedes

$$\frac{8}{3}\frac{1}{\varkappa}\frac{\beta^3}{\gamma}\left[\int_0^\eta \frac{1}{\eta}\ln 4\frac{\beta^2}{\gamma}\frac{(\beta^2+\gamma\eta)^{1/2}-\beta}{(\beta^2+\gamma\eta)^{1/2}+\beta}\,d\eta - \beta\int_0^\eta \frac{\ln\eta}{\eta(\beta^2+\gamma\eta)^{1/2}}\,d\eta\right].$$

[2] Die Durchführung der numerischen Rechnungen verdanke ich meinem Mitarbeiter Herrn *Herbert Moch*.

2. Geschwindigkeitsverteilung und Verdrängungsdicke. Die mit den obigen theoretischen Werten von c_1 und λ berechneten Geschwindigkeitsverteilungen (31) geben die experimentellen Verteilungen nun auch für starken Druckanstieg brauchbar wieder; vgl. Abb. 7. Die Verteilung für $\alpha = 4°$, die etwas aus dem Rahmen fällt, haben wir in Abb. 8 besonders dargestellt und dazu noch die Verteilungsfunktion der ersten Näherung eingetragen.

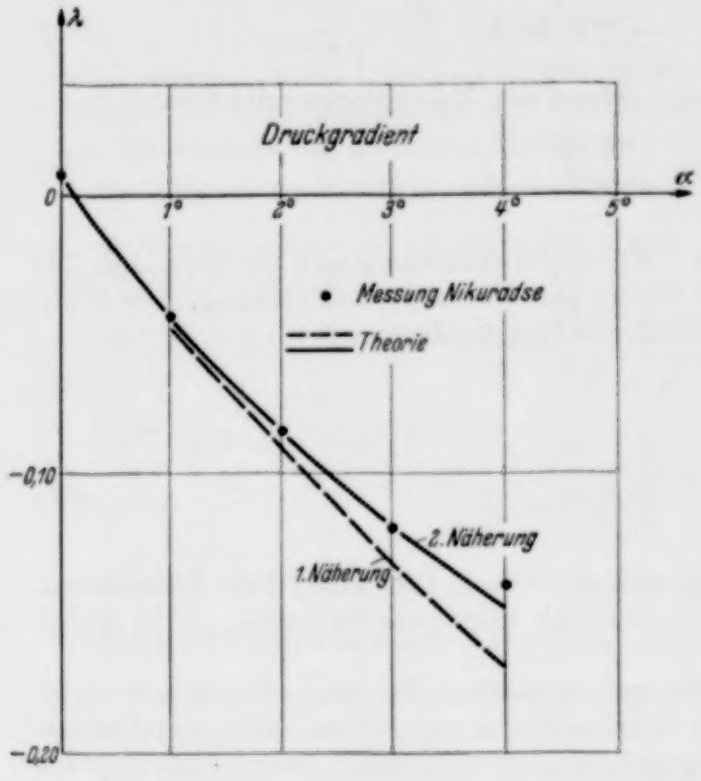

Abb. 5.

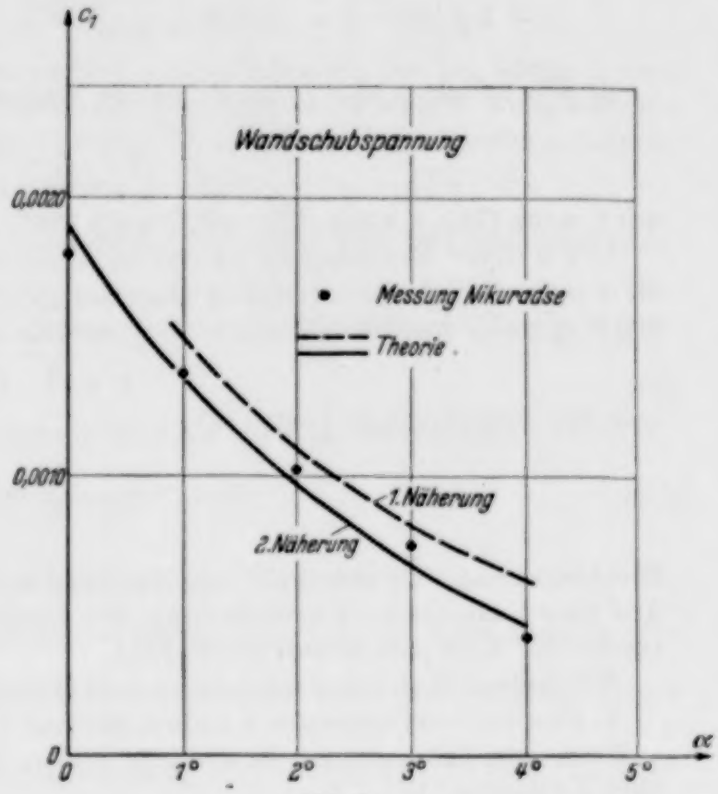

Abb. 6.

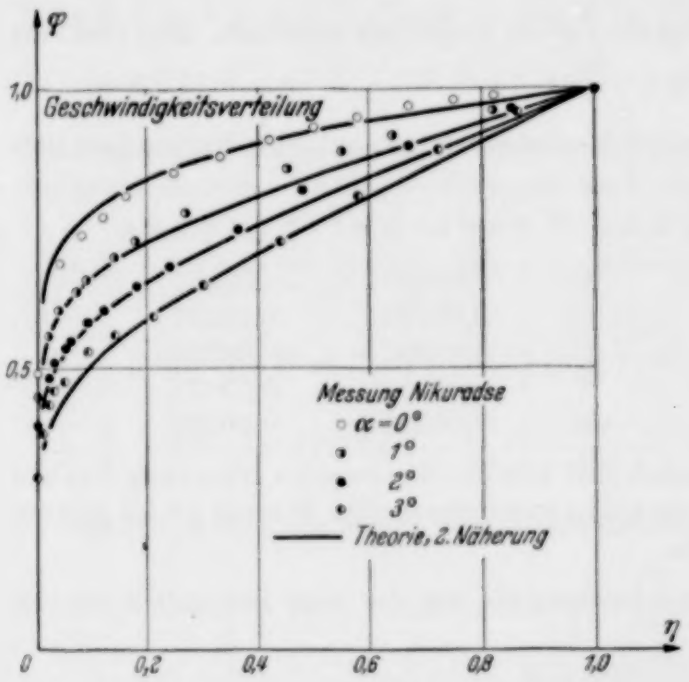

Abb. 7.

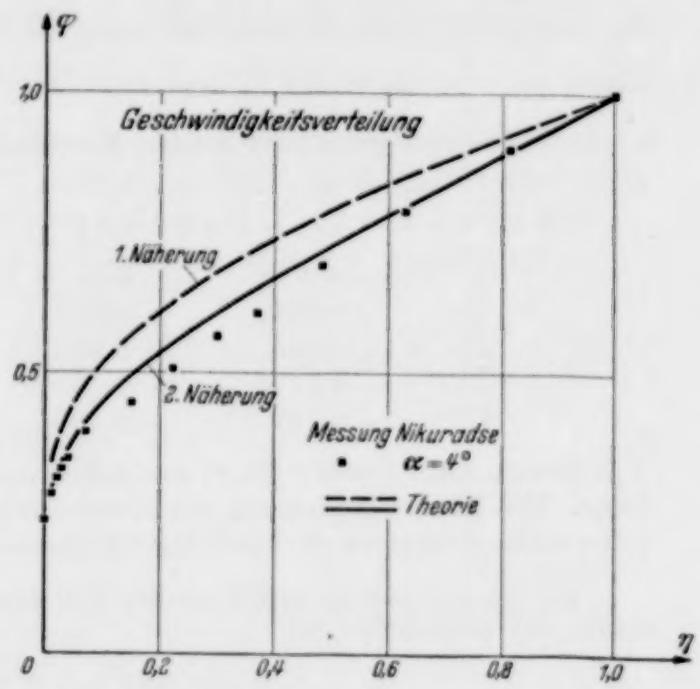

Abb. 8.

Abb. 9 enthält die Geschwindigkeitsverteilung in den *Prandtl*schen Koordinaten

$$\frac{u}{v_*} = \frac{\varphi}{\sqrt{c_1}}, \qquad \frac{v_* y}{\nu} = \frac{Re\sqrt{c_1}}{2}\eta . \tag{34}$$

Als experimentelle Werte der Wandschubspannung c_1 wurden dabei die mit Hilfe des Wandgesetzes ermittelten Werte (Abschn. 3) zugrunde gelegt.

Man kann der Abbildung entnehmen, wie mit größer werdendem α, also wachsendem Druckanstieg und gleichzeitig fallender Wandschubspannung, der Übergang des Wandgesetzes in das logarithmische Gesetz sich immer weiter zur Wand hin verschiebt, d. h. aber, daß der Druckgradient immer weiter zur Wand hin sich bemerkbar macht gemäß (1). Inwieweit allerdings bei starkem Druckanstieg überhaupt noch eine Schicht mit logarithmischem Geschwindigkeitsgesetz existiert, kann erst bei Vorliegen des vollständigen Wandgesetzes beurteilt werden.

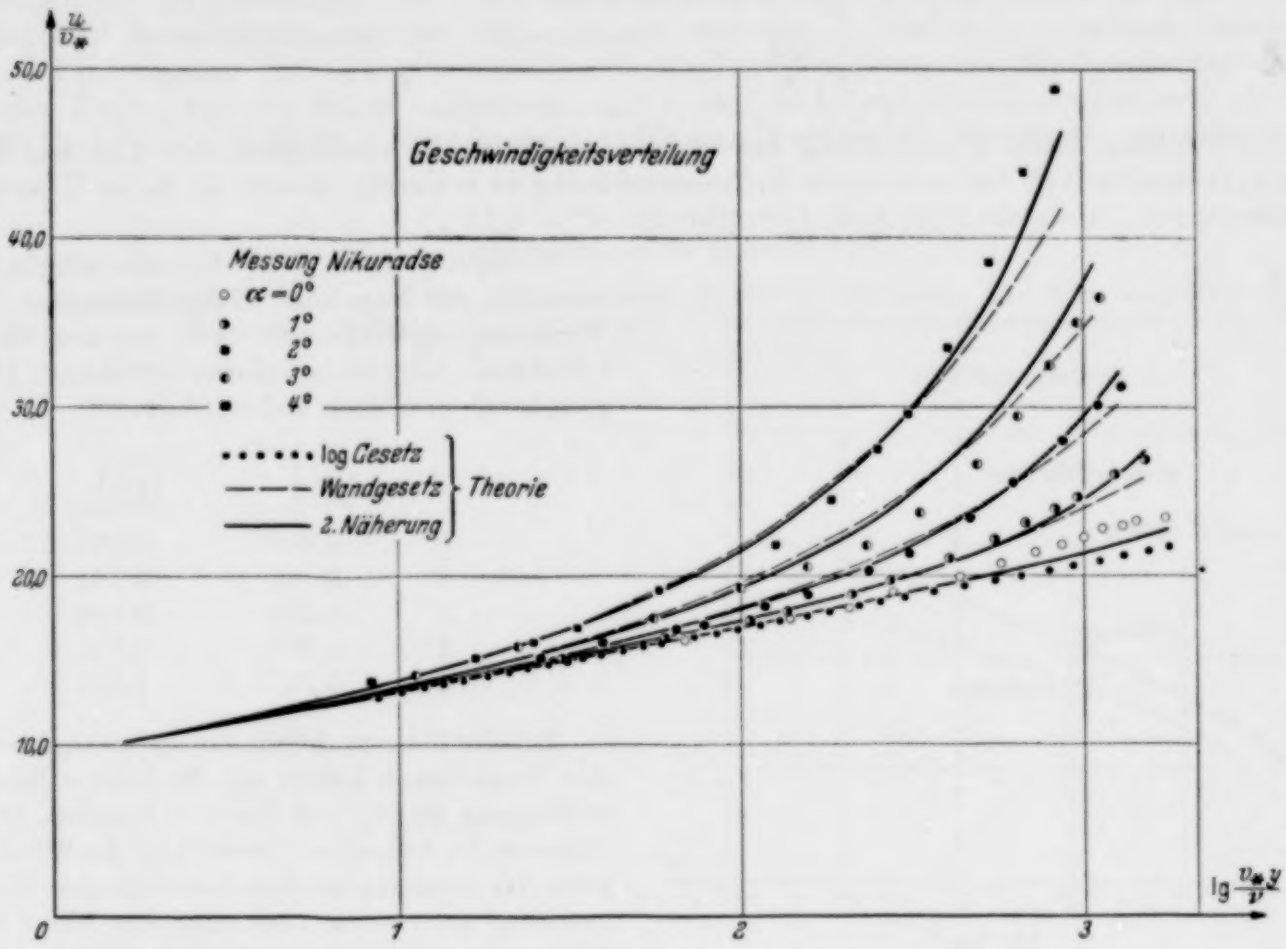

Abb. 9.

In Abb. 7 ist noch die theoretische Verteilung für $\alpha = 0°$ angegeben. Die Verteilungsfunktion, die man analog wie bei der turbulenten Rohrströmung[1] gewinnt, lautet für die turbulente Strömung im ebenen Kanal mit parallelen Wänden

$$\varphi = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[\ln\eta - \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu^*}{\varkappa}\right)\eta\right] + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-1 + \ln\left(2\,\varkappa\, Re\,\sqrt{c_1}\right) + \varkappa\,\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right]. \tag{35}$$

Der Impulssatz ergibt hier $c_1 = \lambda/4$. Mittels der Randbedingung $\varphi = 1$ für $\eta = 1$ folgt die Widerstandsformel:

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}} = \frac{2{,}3}{\varkappa}\lg\left(Re\,\sqrt{c_1}\right) + \frac{1}{\varkappa}\left[-\frac{3}{2} - \frac{\mu^*}{\varkappa} + \ln(2\,\varkappa) + \varkappa\,\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right]. \tag{36}$$

Die graphische Lösung der Gleichung (36) ergibt hier $c_{1\,theor} = 0{,}0019$, während man aus dem Vergleich (Abb. 1) der in Wandnähe gelegenen experimentellen Werte der Geschwindigkeit mit dem logarithmischen Gesetz $c_{1\,exp} = 0{,}0018$ erhält.

Allgemeiner erhält man für turbulente Strömungen in konvergenten oder divergenten Kanälen mit schwachem Druckabfall folgende Entwicklung, wenn man das Träg-

[1] *W. Szablewski*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 131.

heitsintegral mittels des logarithmischen Gesetzes berechnet[1]:

$$\varphi = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left\{\ln\eta + A\,\eta + B\,\eta\ln\eta + C\,\eta\ln^2\eta\right\} + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-1 + \ln\left(2\,\varkappa\,Re\sqrt{c_1}\right) + \varkappa\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right]$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{\mu^*}{\varkappa} - \frac{1}{8}\frac{\lambda}{c_1} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\varkappa^2}\langle([\,]-2)^2+2\rangle,\\ B &= -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\varkappa^2}([\,]-2),\\ C &= -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\varkappa^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Zur Prüfung dieser Entwicklung haben wir den Winkel α^* berechnet, bei dem wir den Druckgradienten Null für eine ebene Diffusorströmung zu erwarten haben. In guter Übereinstimmung mit *Nikurades* (vgl. Abb. 5) ergibt sich $\alpha^* = 0{,}13°$.

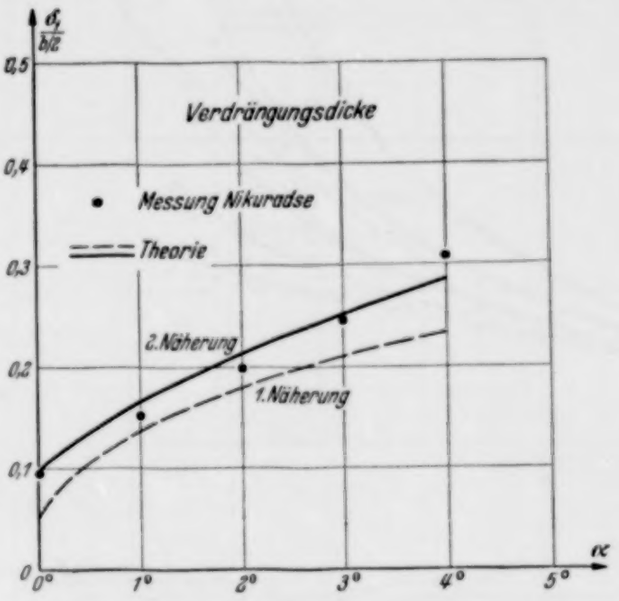

Abb. 10.

Entsprechend den Geschwindigkeitsverteilungen liegen die Dinge bezüglich der Verdrängungsdicke, die wir aus der theoretischen Geschwindigkeitsverteilung (31) graphisch ermittelt haben (Abb. 10)

α	$\left(\frac{\delta_1}{b/2}\right)_{theor}$	$\left(\frac{\delta_1}{b/2}\right)_{exp}$
0°	0,099	0,095
1°	0,166	0,151
2°	0,213	0,198
3°	0,253	0,245
4°	0,287	0,309

Bei der Konstruktion der approximierenden Funktionen haben wir die äußere Randbedingung $d\varphi/d\eta = 0$ für $\eta = 1$ außer Acht gelassen. In Anbetracht dessen ist die Wiedergabe der experimentellen Verteilungen überraschend gut, wenn auch nach der Mitte der Strömung zu die Approximation schlechter wird. Wir wollen jedoch die Möglichkeit einer Verbesserung durch Berücksichtigung der genannten äußeren Randbedingung hier nicht weiter erörtern.

7. Zusammenfassung. Die theoretische Behandlung turbulenter Grenzschichtströmungen mit mittlerem und starkem Druckanstieg erfordert die Berücksichtigung des Einflusses des Druckgradienten bis zur Wand hin. Unter Zugrundelegung des *Prandtl*schen Schubspannungsansatzes wird als Verallgemeinerung des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes ein Wandgesetz abgeleitet, das diesem Einfluß in Wandnähe Rechnung trägt. Die empirischen Koeffizienten des Wandgesetzes sind die beiden empirischen Koeffizienten des logarithmischen Gesetzes und vom Druckgradienten der Strömung unabhängig. Das Wandgesetz kann unter Umständen dazu dienen, die Wandschubspannung aus der experimentellen Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe zu bestimmen.

Der theoretischen Untersuchung turbulenter Strömungen in ebenen Diffusoren werden die bekannten Messungen *Nikuradses* zugrunde gelegt. Es zeigt sich, daß bereits mittels des Wand-

[1] Die (23) entsprechende Entwicklung lautet hier ($\lambda > 0$) mit

$$\sqrt{c_1 - \frac{\lambda}{4}\eta - \operatorname{tg}\alpha\int_0^\eta \varphi^2\,d\eta} \approx \sqrt{c_1}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{\lambda}{c_1}\eta - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{c_1}\int_0^\eta \varphi^2\,d\eta\right) \qquad \text{für kleine } \eta,$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[\ln\eta - \frac{\mu^*}{\varkappa}\eta - \frac{1}{8}\frac{\lambda}{c_1}\eta - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{c_1}\int_0^\eta \varphi^2\,d\eta\right] + \text{konst.}$$

gesetzes Druckgradient, Wandschubspannung und Geschwindigkeitsverteilung für mittleren Druckanstieg in brauchbarer Näherung berechnet werden können. Methodisch wird dabei so vorgegangen, daß die Geschwindigkeitsverteilung über der gesamten Breite der Kanalströmung durch das Wandgesetz approximiert wird. Wandschubspannung und Druckgradient werden dann mittels des Impulssatzes und einer äußeren Randbedingung bestimmt.

Eine brauchbare Wiedergabe der experimentellen Werte auch für starken Druckanstieg erzielt man, wenn man als approximierende Funktion eine analytische Weiterentwicklung des Wandgesetzes ins Innere der Grenzschichtströmung hinein benutzt. Diese analytische Weiterentwicklung ist charakterisiert durch Berücksichtigung der Trägheitskräfte in erster Näherung und Berücksichtigung des Vorganges der turbulenten Mischung in zweiter Näherung, d. h. Einbeziehung des zweiten Gliedes der *Taylor*entwicklung der Mischungswegfunktion in die Rechnung. Der dabei auftretende dritte empirische Koeffizient erweist sich als vom Druckgradienten unabhängig und ist darüber hinaus als universelle Konstante anzusehen.

(Eingegangen am 24. Oktober 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Szablewski*, Deutsche Akademie der Wis enschaften, Forschungsinstitut für Mathematik, Abt. Angewandte Mathematik, Berlin W 8, Jägerstr. 22/23.

Strömung in einem 90°-Knie*.

Von D. Haase.

1. Einleitung. Die Strömung in einem 90°-Knie, das aus ebenen Wänden zusammengesetzt ist, soll zunächst als ebene Potentialströmung einer inkompressiblen Flüssigkeit betrachtet werden. Dabei wird die Annahme gemacht, daß sich, ausgehend von der scharfen inneren Kniekante (Abb. 1), eine Diskontinuitätsfläche bildet, die von dem von der Flüssigkeit durchströmten Raum ein (meist als Totwasser bezeichnetes) Gebiet abtrennt, in dem die Geschwindigkeit Null und der Druck konstant sind.

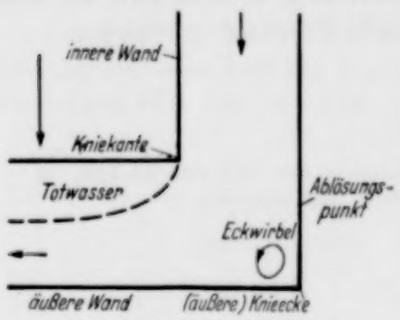

Abb. 1. 90°-Knie, Bezeichnungen.

Man kann zeigen, daß derartige Diskontinuitätsflächen nicht stabil sind. Es liegt daher nahe, stromabwärts eine Vermischung des strömenden Mediums mit dem Totwasser anzunehmen. Ist dort die Umlenkung fast beendet, so läßt sich ein Verlust an Strömungsenergie von der Art eines *Carnot*schen Stoßverlustes berechnen.

Der hiermit beschriebene Vorgang stellt eine weitgehende Idealisierung der Strömung einer realen Flüssigkeit dar. Man kann aber beobachten, daß es ein Gebiet gibt, das etwa dem „Totwasser" entspricht; allerdings herrscht dort eine recht lebhafte und ungeordnete Bewegung. Immerhin ist eine recht scharfe Trennung zwischen dem realen „Totwasser" und der „gesunden" Strömung zu erkennen. Es kann daher interessant sein, festzustellen, wie weit der reale Strömungsvorgang mit dem oben beschriebenen, idealisierten übereinstimmt.

Bei einem Versuch wurde angestrebt, zunächst einmal die Geschwindigkeits- und Druckverteilung der Potentialströmung in einem Querschnitt nicht zu weit stromaufwärts vor der Umlenkung experimentell zu verifizieren. Dann wurden Geschwindigkeits- und Druckmessungen stromabwärts von dieser Stelle gemacht und Vergleiche mit Rechnungen durchgeführt.

Bei der Strömung der realen Flüssigkeit kann sich in der äußeren Ecke längere Zeit ein „Eckwirbel" halten, dessen Zentrum sich wenig bewegt. Diese Erscheinung wird bei der gemachten Idealisierung nicht berücksichtigt. Jedoch kann man aus der Kenntnis des Druckverlaufs an der äußeren Wand mit Hilfe der Grenzschichttheorie voraussagen, daß sich die Strömung vor Erreichen der äußeren Ecke von der Wand ablöst. Dieser Ablösungspunkt wurde mit Hilfe eines Näherungsverfahrens von *Gruschwitz* [1] vorausbestimmt.

Bei der idealisierten Strömung wurde die Schwerkraft nicht berücksichtigt. Die Versuche wurden mit Luft durchgeführt. Bei den gegebenen Abmessungen konnte von der Wirkung der Schwerkraft auf den Strömungsverlauf abgesehen werden.

2. Potentialströmung im Knie, insbesondere Randstromlinien. Die Potentialströmung in einem Knie, die durch die Bildung einer Diskontinuitätsfläche gekennzeichnet ist, ist ein Sonderfall des Ausflusses aus der seitlichen Wand eines Behälters. Dieses Problem hat *v. Mises* [2] in allgemeinerer Form behandelt. Er wendete dabei die *Helmholtz-Kirchhoff*sche Hodographenmethode an und ermittelte das komplexe Potential

$$W = \Phi + i\,\Psi$$

(Φ = Geschwindigkeitspotential, Ψ = Stromfunktion) als Funktion der komplexen Geschwindigkeit

$$w = v_x - i\,v_y,$$

wobei $v_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$, $v_y = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$ die x- bzw. y-Komponente der Geschwindigkeit sind.

* Dissertation Technische Universität Berlin-Charlottenburg 1953 (gekürzt). Berichter: Professor Dr.-Ing. *R. Wille* und Professor *W. Kucharski*.

[1] *E. Gruschwitz*, Ing.-Arch. 2 (1931), S. 321.

[2] *P. Frank* und *R. v. Mises*, Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, S. 417, Braunschweig 1935.

Für die Strömung in einem 90°-Knie ergibt sich (Abb. 2)

$$W = \frac{c\, v_0}{\pi} \ln \left| - \frac{\left(\frac{w}{v_1}\right)^4 + \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\left(\frac{w}{v_1}\right)^2 + 1}{\left[\left(\frac{w}{v_1}\right)^2 - 1\right]^2} \right|, \tag{2,1}$$

wobei v_0, v_1 die Geschwindigkeiten im Unendlichen sind. Für die Strahlkontraktion ε erhält man mit Hilfe des Impulssatzes

$$\Pi \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 2\, \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Tg}\, \varepsilon\,. \tag{2,2}$$

Daraus folgt $\varepsilon = 0{,}52555$.

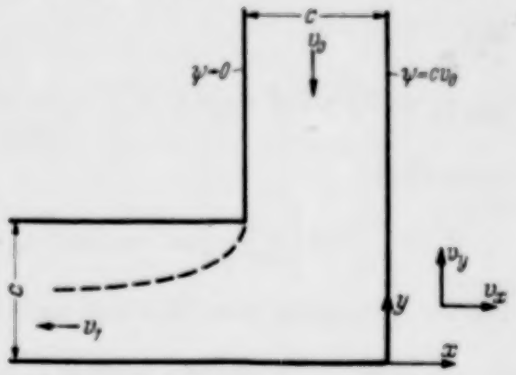

Abb. 2. Potentialströmung im Knie.

Es werde nun $W(z)$ gebildet ($z = x + i\,y$), indem aus (2,1) w mittels der Gleichung

$$w = \frac{dW}{dz} \tag{2,3}$$

eliminiert wird [1]. Löst man (2,1) nach w^2 auf, so wird

$$w^2 = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{e^{\frac{\pi W}{c v_0}} + 1} \left[- \frac{\varepsilon^4 + 1}{\varepsilon^2} + 2\, e^{\frac{\pi W}{c v_0}} \pm \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)^2 - 4\, e^{\frac{\pi W}{c v_0}}} \right],$$

sodaß wegen (2,3)

$$\pm\, dz = \frac{\sqrt{2}}{v_1} \frac{\sqrt{e^{\frac{\pi W}{c v_0}} + 1}\, dW}{\sqrt{- \frac{\varepsilon^4 + 1}{\varepsilon^2} + 2\, e^{\frac{\pi W}{c v_0}} \pm \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)^2 - 4\, e^{\frac{\pi W}{c v_0}}}}}\,. \tag{2,4}$$

Führt man in (2,4) eine neue Veränderliche α ein durch die Substitution

$$W = \frac{c\, v_0}{\pi} \ln \left[\left(\frac{1+\varepsilon^2}{2\,\varepsilon}\right)^2 \sin^2 \alpha - 1 \right], \tag{2,5}$$

so wird

$$dz = \pm\, i\, \frac{2\, c\, \varepsilon}{\pi} \frac{(1 \pm \cos\alpha)\cos\alpha}{\left(\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\right)^2 - \cos^2\alpha}\, d\alpha\,. \tag{2,6}$$

Die Integration von (2,6) ergibt, wenn man die Integrationskonstante Null setzt und die Vorzeichen passend wählt,

$$z = i\, \frac{c}{\pi}\, \varepsilon \left\{ \frac{1+\varepsilon^2}{2\,\varepsilon} \ln \frac{1 + \frac{1+\varepsilon^2}{2\,\varepsilon} \sin\alpha}{1 - \frac{1+\varepsilon^2}{2\,\varepsilon} \sin\alpha} + \frac{1-\varepsilon^2}{2\,\varepsilon} \ln \frac{1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\,\varepsilon} \operatorname{tg}\alpha}{1 - \frac{1-\varepsilon^2}{2\,\varepsilon} \operatorname{tg}\alpha} + 2\,\alpha \right\}. \tag{2,7}$$

Das komplexe Potential W an einem Orte z erhält man nun, indem in (2,5) und (2,7) jeweils der gleiche Parameter α eingesetzt wird. Das Auffinden der zu wählenden Werte α wird erleichtert, wenn man in einigen Fällen eine Konstante φ durch die Gleichung

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \tag{2,8}$$

einführt, so daß

$$\frac{2\,\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = \operatorname{tg}\varphi\,, \qquad \frac{2\,\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \sin\varphi\,.$$

[1] Für die geraden Wände allein kann man $W(z)$ einfacher bestimmen, wenn man bereits in (2,1) $v_x = 0$ oder $v_y = 0$ setzt. Hier soll jedoch die allgemeine Lösung gesucht werden.

Damit kann man (2,5) und (2,7) auch schreiben:

$$W = \frac{c\,v_0}{\pi} \ln\left[\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^2 - 1\right], \tag{2,5a}$$

$$z = i\,\frac{c}{\pi}\,\varepsilon\left\{\frac{1}{\sin\varphi}\ln\frac{1+\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}}{1-\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\ln\frac{1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}}{1-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}} + 2\,\alpha\right\}. \tag{2,7a}$$

Mit

$$\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2 \tag{2,9}$$

(α_1, α_2 reell) wird wegen

$$\sin\alpha = \sin\alpha_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_2 + i\cos\alpha_1\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_2$$

schließlich

$$W = \frac{c\,v_0}{\pi}\ln\left[\frac{1}{\sin^2\varphi}(\sin^2\alpha_1\,\mathfrak{Cof}^2\,\alpha_2 - \cos^2\alpha_1\,\mathfrak{Sin}^2\,\alpha_2 + 2\,i\sin\alpha_1\cos\alpha_1\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_2\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_2) - 1\right]. \tag{2,5b}$$

Durch Trennung von Realteil und Imaginärteil erhält man daraus das Potential

$$\Phi = \frac{c\,v_0}{2\,\pi}\ln\left\{\frac{1}{\sin^4\varphi}[(\sin^2\alpha_1\,\mathfrak{Cof}^2\,\alpha_2 - \cos^2\alpha_1\,\mathfrak{Sin}^2\,\alpha_2 - \sin^2\varphi)^2 + 4\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_1\,\mathfrak{Sin}^2\,\alpha_2\,\mathfrak{Cof}^2\,\alpha_2]\right\} \tag{2,10}$$

und die Stromfunktion

$$\Psi = \frac{c\,v_0}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_2\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_2}{\sin^2\alpha_1\,\mathfrak{Cof}^2\,\alpha_2 - \cos^2\alpha_1\,\mathfrak{Sin}^2\,\alpha_2 - \sin^2\varphi} = \frac{c\,v_0}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\,\gamma\,, \tag{2,11}$$

wenn man für das Argument des Arcustangens γ schreibt. Der Wert $\gamma = 0$ entspricht den Stromlinien $\Psi = 0\,,\ \pm c\,v_0\,,\ \ldots\,;\ \gamma = 0$ ist etwa durch $\alpha_2 = 0$ zu befriedigen. Dann wird für $\alpha_1 = \varphi$ die Variable z unendlich groß. Daher sei zunächst

a) $\alpha_2 = 0\,,\ \alpha_1 = 0 \ldots \varphi$. Aus (2,7a) folgt dann

$$\left.\begin{array}{l} x = 0\,, \\ y = \dfrac{2\,c}{\pi}\,\varepsilon\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\,\mathfrak{Ar\,Tg}\,\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\varphi} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\,\mathfrak{Ar\,Tg}\,\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\varphi} + \alpha_1\right] \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (\alpha_1 = 0 : y = 0) \\ (\alpha_1 \to \varphi : y \to \infty) \end{array} \tag{2,12}$$

und aus (2,10)

$$\Phi = \frac{c\,v_0}{\pi}\ln\left|\frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\varphi} - 1\right| = \frac{c\,v_0}{\pi}\ln\left(1 - \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\varphi}\right). \tag{2,13}$$

Aus (2,12) und (2,13) folgt

$$v_y = \frac{d\Phi}{d\alpha_1}\,\frac{d\alpha_1}{dy} = -\frac{v_0}{\varepsilon}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2}\right). \tag{2,14}$$

Eliminiert man mittels (2,14) α_1 aus (2,12), so ergibt sich

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0\,, \\ y = -\dfrac{2\,c}{\pi}\left[\mathfrak{Ar\,Tg}\,\dfrac{v_y}{v_0} + \varepsilon^2\,\mathfrak{Ar\,Tg}\,\varepsilon^2\,\dfrac{v_y}{v_0} + 2\,\varepsilon\operatorname{arc\,tg}\,\varepsilon\,\dfrac{v_y}{v_0}\right]. \end{array}\right. \tag{2,15}$$

b) $\alpha_2 = 0\,,\ \alpha_1 = \varphi \ldots \dfrac{\pi}{2}$. Hier folgt entsprechend

$$\left.\begin{array}{l} x = -c\,, \\ y = \dfrac{2\,c}{\pi}\,\varepsilon\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\,\mathfrak{Ar\,Tg}\,\dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha_1} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\,\mathfrak{Ar\,Tg}\,\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha_1} + \alpha_1\right] \end{array}\right\} \tag{2,16}$$

mit

$$\alpha_1 \to \varphi : y \to \infty$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} : y = \frac{2\,c}{\pi}\,\varepsilon\left[\frac{1+\varepsilon^2}{2\,\varepsilon}\,\mathfrak{Ar\,Tg}\,\frac{2\,\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{c}{\pi}\,\varepsilon\left[\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\,2\,\mathfrak{Ar\,Tg}\,\varepsilon + \pi\right] \qquad \text{und wegen (2,2)}$$

$$= \frac{c}{\pi}\,\varepsilon\left[\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\,\pi\,\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^2+1} + \pi\right] = c\,,$$

$$\Phi = \frac{c\, v_0}{\pi} \ln\left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \varphi} - 1\right), \tag{2,17}$$

$$v_y = -\frac{v_0}{\varepsilon} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2}\right), \tag{2,18}$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= -c\,, \\ y &= -\frac{2c}{\pi}\left[\operatorname{Ar\,Ctg}\frac{v\,y}{v_0} + \varepsilon^2 \operatorname{Ar\,Tg}\,\varepsilon^2 \frac{v_y}{v_0} + 2\,\varepsilon \operatorname{arc\,tg}\,\varepsilon \frac{v_y}{v_0}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2,19}$$

c) $\alpha_1 = 0\,, \quad \alpha_2 = 0 \ldots \infty$

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{2c}{\pi}\varepsilon\left[\frac{1}{\sin\varphi} \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{Sin}\alpha_2}{\sin\varphi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{Tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\varphi} + \alpha_2\right], \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(\alpha_2 = 0 \;:\; x = 0) \\ &(\alpha_2 \to \infty : x \to -\infty) \end{aligned} \tag{2,20}$$

$$\Phi = \frac{c\, v_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\operatorname{Sin}^2 \alpha_2}{\sin^2 \varphi} + 1\right), \tag{2,21}$$

$$v_x = -\frac{v_0}{2} \operatorname{Tg}\left(\frac{\alpha_2}{2}\right), \tag{2,22}$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{2c}{\pi}\varepsilon\left[\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varepsilon}\frac{v_x}{v_1} + \varepsilon \operatorname{arc\,tg}\,\varepsilon \frac{v_x}{v_1} + 2 \operatorname{Ar\,Tg}\frac{v_x}{v_1}\right], \\ y &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2,23}$$

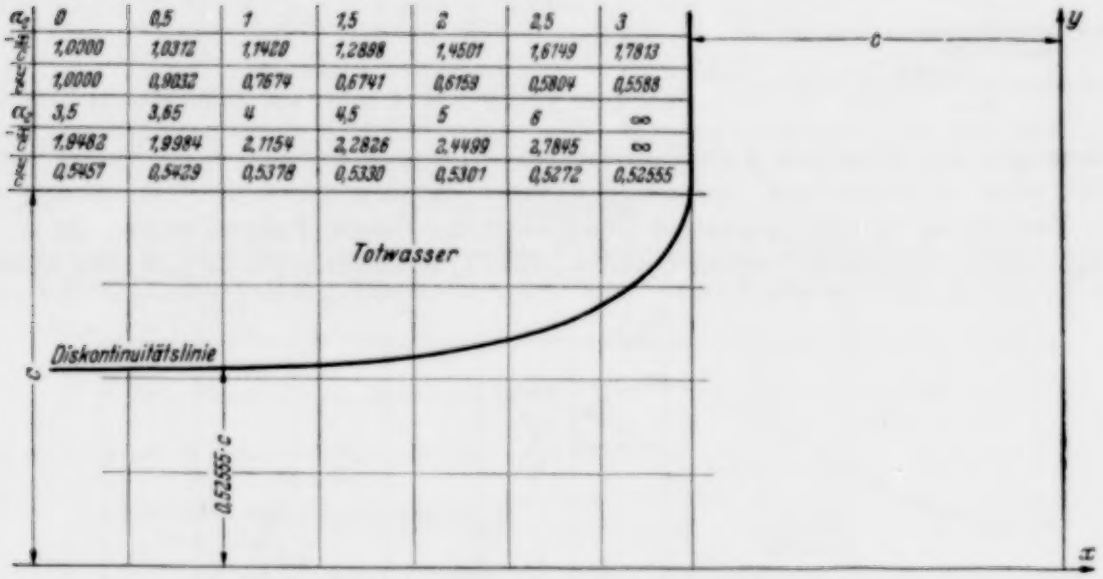

Abb. 3. Potentialsströmung im Knie; Diskontinuitätsfläche.

d) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}\,, \quad \alpha_2 = 0 \ldots \infty$ (Gleichung der Diskontinuitätslinie).

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{c}{\pi}\varepsilon\left[\frac{\pi}{\sin\varphi} + \frac{2}{\operatorname{tg}\varphi} \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{Ctg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\varphi} + 2\,\alpha_2\right], \\ y &= +\frac{c}{\pi}\varepsilon\left[\frac{2}{\sin\varphi} \operatorname{Ar\,Tg}\frac{\sin\varphi}{\operatorname{Cos}\alpha_2} + \pi\right] \end{aligned}\right\} \tag{2,24}$$

mit

$$\alpha_2 = 0 : x = -c \qquad y = \frac{c}{\pi}\varepsilon\left[\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon} 2 \operatorname{Ar\,Tg}\,\varepsilon + \pi\right]$$

und unter Berücksichtigung von (2,2):

$$y = c$$

$$\alpha_2 \to \infty : x \to -\infty$$
$$y \to c\,\varepsilon\,.$$

Wegen (2,11) und $\alpha_1 = \pi/2$ stellt (2,24) eine Stromlinie dar, und zwar die Diskontinuitätslinie (Abb. 3). Am Rande sei vermerkt, daß aus (2,24) folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha_2}\,. \tag{2,25}$$

3. Stoßverlust. Nimmt man an, daß nach erfolgter Umlenkung eine Vermischung des strömenden Mediums mit dem Totwasser stattfindet und daß diese Vermischung plötzlich mit großer Heftigkeit einsetzt, so läßt sich mit Hilfe des Impulssatzes ein Stoßverlust errechnen. Setzt man stationäre Strömung voraus und verwendet man die eindimensionale Stromfadentheorie, so ergibt der Impulssatz, angewendet auf eine Kontrollfläche nach Abb. 4, wenn man die Wandschubspannung zwischen den Stellen 2 und 3 vernachlässigt,

$$\varrho\, F\, w_3\,(w_3 - w_2) = (p_2 - p_3)\, F\,. \tag{3,1}$$

Dabei bedeuten w_i, p_i die Geschwindigkeit und den Druck im Querschnitt i; F ist der Querschnitt des Rohres, ϱ die Dichte des strömenden Mediums.

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und durch Ansetzen der *Bernoulli*schen Gleichung zwischen den Stellen 1 und 2 (Abb. 4) kann man aus (3,1) einen Druckverlust berechnen:

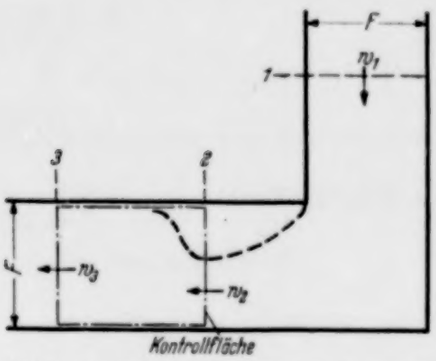

Abb. 4. Stoßverlust bei Strömung durch ein Knie.

$$p_1 - p_3 = \frac{1}{2}\,\varrho\,(w_2 - w_1)^2 = \frac{1}{2}\,\varrho\, w_1^2\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2. \tag{3,2}$$

Definiert man einen dimensionslosen Widerstandsbeiwert

$$\zeta = \frac{p_1 - p_3}{\frac{1}{2}\,\varrho}\,\frac{1}{w_1^2}\,, \tag{3,3}$$

so ergibt der Vergleich von (3,2) und (3,3)

$$\zeta = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2. \tag{3,4}$$

Mit $\varepsilon = 0{,}52555$ hat man als Zahlenwert $\zeta = 0{,}81$.

Nach Messungen am Hermann Föttinger-Institut[1] beträgt der hier berechnete Wert ζ etwa zwei Drittel eines experimentell ermittelten Faktors, der den durch die Umlenkung zusätzlich bedingten Verlust an Strömungsenergie repräsentiert. Dieser Faktor wurde durch Messung des Druckabfalls zwischen zwei Stellen 1 und 3 (Abb. 4) bestimmt, die so gewählt waren, daß in

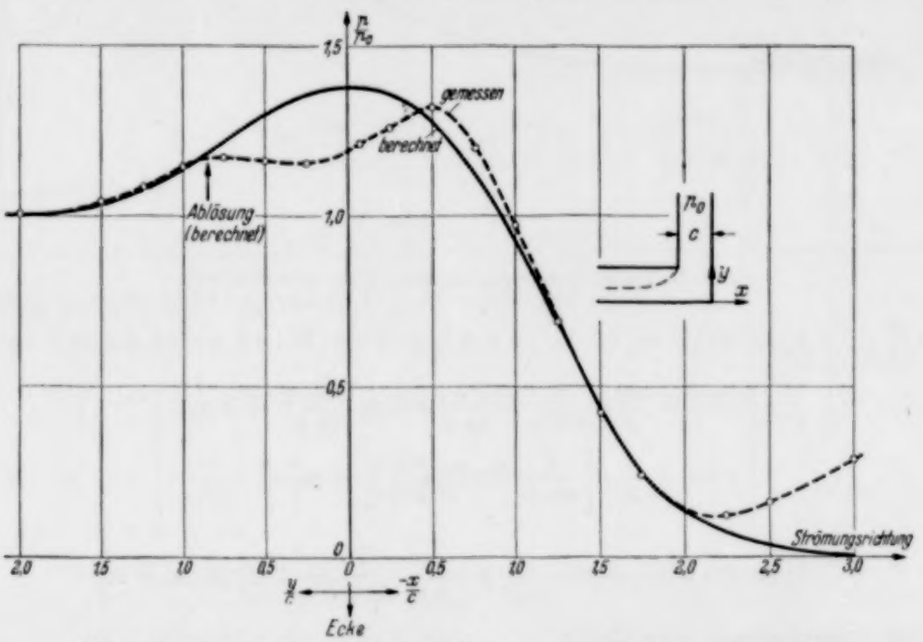

Abb. 5. Druckverlauf längs der Außenwände. —— berechnet; — — — gemessen.

beiden die Verteilung der Geschwindigkeit über den Querschnitt nahezu der der voll ausgebildeten turbulenten Strömung entsprach. Daher ist eine volle Übereinstimmung mit dem oben berechneten ζ nicht zu erwarten.

4. Druck- und Geschwindigkeitsverlauf längs der Wände bei Potentialströmung. Sind v, p die Geschwindigkeit bzw. der Druck an einer beliebigen Stelle des Knies, v_0, p_0 die Werte für

[1] *R. Wille* und *D. Haase*, Allgemeine Wärmetechnik 4 (1953), S. 1.

das dem Knie zuströmende Medium in der Entfernung Unendlich, so hat man durch Anwendung der *Bernoulli*schen Gleichung und der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[1 - \left(\varepsilon \frac{v}{v_0}\right)^2\right]. \tag{4,1}$$

Damit kann man bei bekanntem Geschwindigkeitsverlauf auch den Druckverlauf bei Potentialströmung berechnen. Dieser ist für die Wände in Abb. 5 und 6 eingetragen.

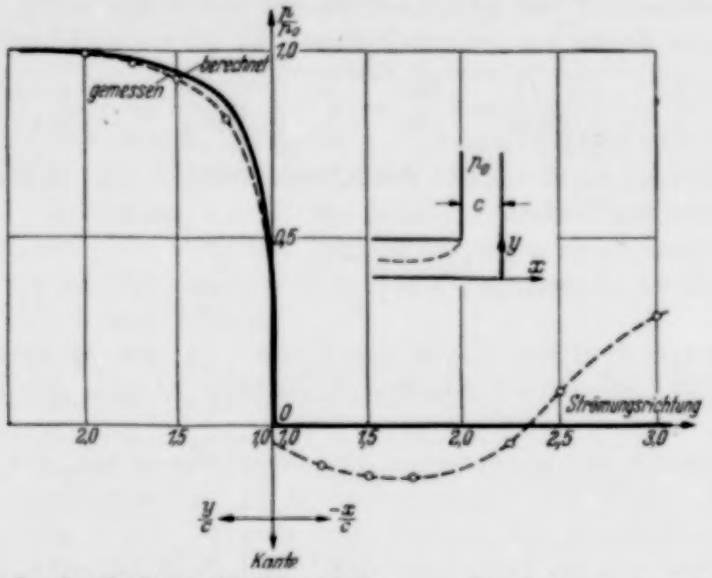

Abb. 6. Druckverlauf längs der Innenwände. —— berechnet; — — — gemessen.

5. Die Versuchsanordnung (Abb. 7). Das Knie war aus einem Rohr mit quadratischem Querschnitt angefertigt; die Seitenlänge des Quadrats betrug

$$c = 265 \text{ mm}$$

(c wird bisweilen auch mit „Rohrdurchmesser" bezeichnet). Die Wände bestanden aus gut gehobelten Kiefernholzbrettern. Die Luft wurde von einem Radialgebläse in einen Kasten von

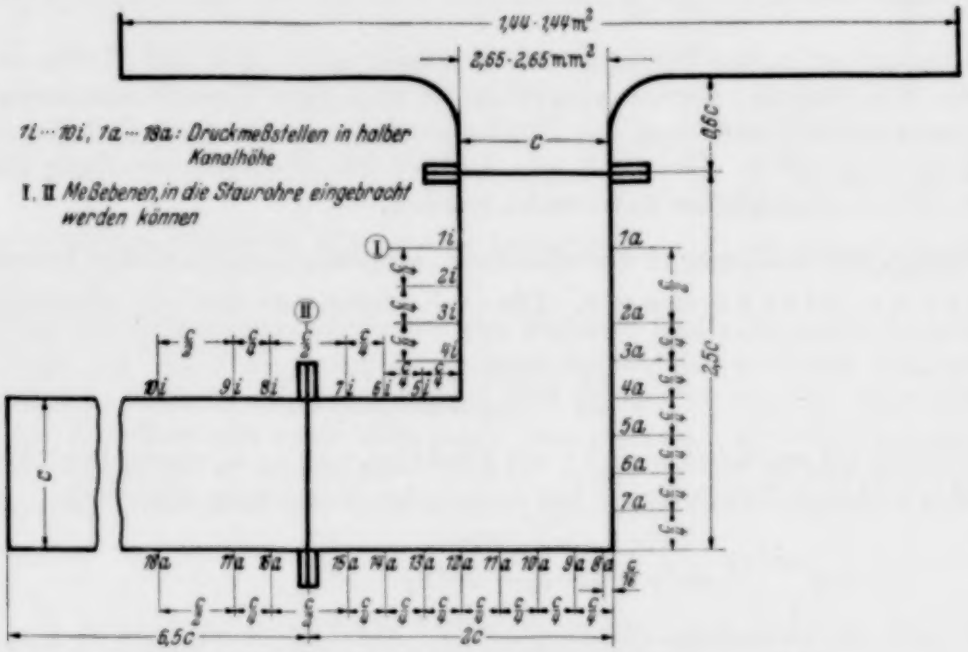

Abb. 7. Schema der Versuchsanlage.

$1{,}44 \times 1{,}44 \times 2$ m³ Inhalt gefördert. Von dort trat sie über eine gut ausgerundete Düse in das Knie und weiterhin über eine gerade Rohrstrecke wieder in den Versuchsraum.

In der Symmetrieebene des Knies waren an den Innen- und Außenwänden Druckstutzen aus Messing angebracht. Außerdem konnten in die Querschnitte I, und II, die je einen Durchmesser von der inneren Kniekante entfernt waren, verschiebbar Staurohre eingebracht werden. Es wurden *Prandtl*sche Rohre mit einem Durchmesser von 3 mm verwendet. Die Messung der Drücke erfolgte mit verstellbaren Schrägrohr-Manometern mit Alkoholfüllung.

6. Druckverteilung längs der Wände (experimentell). In einer Voruntersuchung wurde mit Hilfe eines Staurohres der statische Druck in der Mitte des Querschnitts I (Abb.7), einen Durchmesser vor der Kniekante, bestimmt und mit den Drücken an den Wänden im gleichen Querschnitt verglichen. Der Druck in der Mitte des Querschnitts I hatte die gleiche Größe wie der Mittelwert der in der Symmetrie-Ebene (des Knies) gemessenen Wanddrücke, die von dem Druck in der Querschnittsmitte um etwa + 1% bzw. − 1% abwichen (wenn man den Druck im Totwasser als Bezugsdruck Null annahm).

Dies stimmt gut überein mit den Drücken, die bei der in den vorigen Kapiteln behandelten Potentialströmung an der Stelle $y/c = 2$ auftreten. Es ist nach (4,1) usw.

$$p/p_0 = 1{,}0094 \quad \text{für} \quad -x/c = 0\,, \quad y/c = 2\,,$$
$$p/p_0 = 0{,}9900 \quad \text{für} \quad -x/c = 1\,, \quad y/c = 2\,.$$

Mit Hilfe des Druckes p_I in der Mitte des Querschnitts I wurde die mittlere Geschwindigkeit v_m bestimmt mittels der Formel

$$v_m = \sqrt{2\,\frac{p_E - p_\mathrm{I}}{\varrho}\,\frac{1}{1+\zeta_{E\,\mathrm{I}}}}\,. \tag{6,1}$$

Dabei ist p_E der Druck vor dem Eintritt in den Kanal; $\zeta_{E\,\mathrm{I}}$ ist ein Düsenbeiwert, der mit 0,03 angenommen wurde. Die Luftgeschwindigkeit v_m betrug 23 m/s, die kinematische Zähigkeit $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ m²/s.

Um nun einen Vergleich der gemessenen Druckverteilung mit der der Potentialströmung durchführen zu können, werde die Geschwindigkeit v_m im Querschnitt I gleich der Geschwindigkeit v_0 der Potentialströmung im Unendlichen gesetzt. Zu v_0 gehört ein Druck p_0 derart, daß bei der Potentialströmung im Totwasser der Druck Null herrscht, nämlich

$$p_0 = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) v_0^2\,. \tag{6,2}$$

Zur Auswertung der Messung der Druckverteilung längs der Wände wird also der Druck im Querschnitt I nach (6,2) und (6,1)

$$p_\mathrm{I} = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) v_m^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)\frac{p_E - p_\mathrm{I}}{1+\zeta_{E\,\mathrm{I}}} \tag{6,3}$$

gesetzt.

Der Druckverlauf ist in den Bildern 5 und 6 eingetragen. Auf Abb. 5 erkennt man deutlich den Einfluß des Eckwirbels. Davon abgesehen ist eine gute Übereinstimmung zwischen dem gemessenen Druckverlauf und dem der Potentialströmung bis zwei Rohrdurchmesser hinter der äußeren Ecke ersichtlich. Dort soll nun die Geschwindigkeitsverteilung längs des Durchmessers in der halben Kanalhöhe untersucht werden.

7. Geschwindigkeitsverteilung 1 Durchmesser stromabwärts von der inneren Kniekante. a) Bei Potentialströmung. Die x-Komponente der Geschwindigkeit (Abb. 2) beträgt

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}\,\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2}\,\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\,. \tag{7,1}$$

Zu ihrer Berechnung sei zunächst x und y als Funktion von α_1, α_2 angegeben. Durch Zerlegung von (2,6a) in Realteil und Imaginärteil hat man unter Beachtung von (2,9)

$$-\frac{x}{c} = \frac{\varepsilon}{\pi}\left[\frac{1}{\sin\varphi}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\sin\varphi\cos\alpha_1\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_2}{\sin^2\varphi + \cos^2\alpha_1 - \mathfrak{Cof}^2\alpha_2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\operatorname{tg}\varphi\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha_2}{\operatorname{tg}^2\varphi(\cos 2\alpha_1 + \mathfrak{Cof}\,2\alpha_2) + \cos 2\alpha_1 - \mathfrak{Cof}\,2\alpha_2} + 2\,\alpha_2\right], \tag{7,2}$$

$$\frac{y}{c} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\left[\frac{1}{\sin\varphi}\ln\frac{(\sin\varphi + \sin\alpha_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_2)^2 + \cos^2\alpha_1\,\mathfrak{Sin}^2\alpha_2}{(\sin\varphi - \sin\alpha_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_2)^2 + \cos^2\alpha_1\,\mathfrak{Sin}^2\alpha_2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\ln\frac{[\sin 2\alpha_1 + \operatorname{tg}\varphi(\cos 2\alpha_1 + \mathfrak{Cof}\,2\alpha_2)]^2 + \mathfrak{Sin}^2\,2\alpha_2}{[\sin 2\alpha_1 - \operatorname{tg}\varphi(\cos 2\alpha_1 + \mathfrak{Cof}\,2\alpha_2)]^2 + \mathfrak{Sin}^2\,2\alpha_2} + 4\,\alpha_1\right]. \tag{7,3}$$

Um nun die Wertepaare (α_1, α_2) zu finden, die zu $-x/c = 2$ gehören, beachte man, daß nach Gleichung (7,2) und (7,3) für große α_2 offenbar $-x/c$ proportional α_2 (und unabhängig von α_1) und y/c proportional α_1 (und unabhängig von α_2) werden. Nun ist bei der Diskontinui-

tätslinie der Koordinate $-x/c = 2$ der Wert $\alpha_2 = 3{,}65$ zugeordnet. Da damit $\mathfrak{Sin}\,\alpha_2$ und $\mathfrak{Cos}\,\alpha_2$ groß wegen 1 werden, sind die oben erwähnten Proportionalitäten für $-x/c = 2$ nahezu erfüllt, so daß man an dieser Stelle, ausgehend von der Diskontinuitätslinie, die Parameter α_1, α_2 leicht ermitteln kann.

Die Berechnung von v_x an der Stelle $-x/c = 2$ nach (7,1) kann man nun wesentlich vereinfachen, wenn man beachtet, daß für große α_2

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \ll \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \ll \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}$$

ist. Die erste Ungleichung sagt aus, daß für große α_2 oder nach obigen Überlegungen für große $-x/c$ die Geschwindigkeit unabhängig von y, d. h. konstant über den durchflossenen Querschnitt ist; die zweite sagt aus, daß α_1 für große $-x/c$ unabhängig von x ist; dies folgt ebenfalls aus den genannten Überlegungen. Daher wird für $-x/c = 2$ v_x durch Division der Ausdrücke $\partial\Phi/\partial\alpha_2$ und $\partial x/\partial\alpha_2$ berechnet und anschließend die Größe des ersten Produktes Gleichung (7,1) abgeschätzt. (Die trotz der Vereinfachungen noch umständlichen Rechnungen, die in der Dissertation ausgeführt sind, sollen hier fortgelassen werden.) Die Geschwindigkeitsverteilung ist in Abb. 8 eingetragen.

b) Experimentelle Bestimmung des Geschwindigkeitsverlaufs. Die experimentelle Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung eines Durchmessers hinter der Knieecke wurde in der halben Kanalhöhe vorgenommen. Die Strömungsrichtung an der Meßstelle wurde jeweils mit einer Fadensonde kontrolliert. Dabei wurde festgestellt, daß die Geschwindigkeitsrichtung außerhalb des Totwassers nur sehr wenig von der Richtung der Kanalachse abwich. Die Luftgeschwindigkeit betrug wie bei der Bestimmung der Druckverteilung $v_m = 23$ m/s bei einer kinematischen Zähigkeit von $\nu = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ m²/s. Der gemessene Geschwindigkeitsverlauf ist ebenfalls in Abb. 8 aufgetragen.

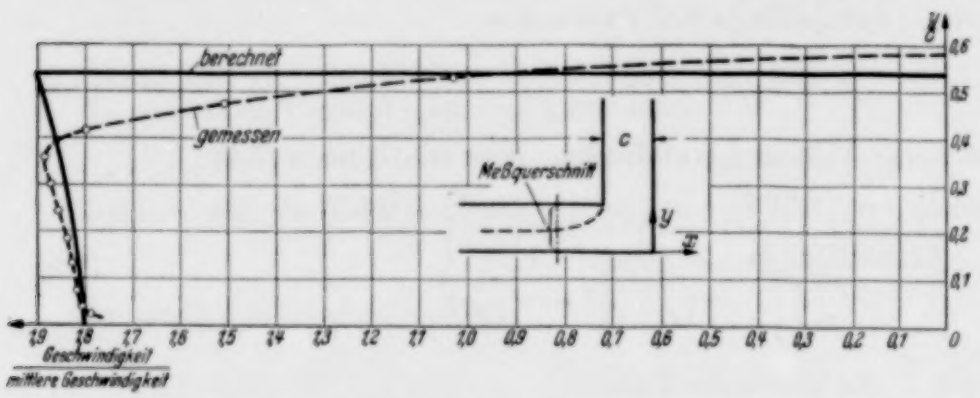

Abb. 8. Geschwindigkeitsverlauf im Mittelschnitt, ein Durchmesser hinter Knie — Innenkante. —— berechnet; — — — gemessen.

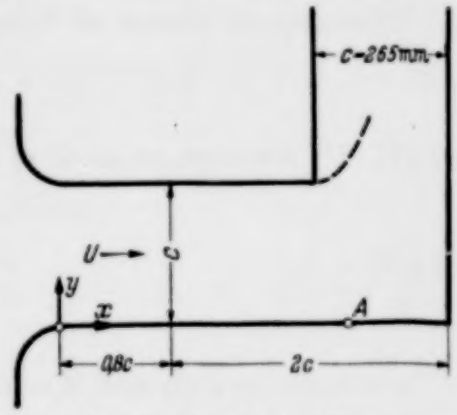

Abb. 9. Zur Berechnung des Ablösungspunktes A.

8. Bestimmung des Ablösungspunktes vor der äußeren Knieecke nach *Gruschwitz*. Zur Berechnung der Lage des Ablösungspunktes A (Abb.9) vor der äußeren Knieecke werde die Strömung längs der äußeren Wand des Knies ($y = 0$ in Abb. 9) mit der Strömung längs einer Platte verglichen. Für diese gilt nach Messungen von *Hansen*[1], daß die Grenzschicht laminar ist von der Vorderkante ($x = 0$) bis zu einer Stelle $x = x_u$, für die die mit der Lauflänge x und der Geschwindigkeit U außerhalb der Grenzschicht gebildete *Reynolds*sche Zahl den Wert

$$Re_{x_u} = \frac{U\,x_u}{\nu} = 3{,}2 \cdot 10^5 \tag{8,1}$$

annimmt. Bei $x = x_u$ wird die Grenzschicht turbulent[2]. Es sind zwar für Re_{x_u} Werte von 10^6 und höher erreicht worden, jedoch nur bei besonders störungsfreier Strömung, eine Voraussetzung, die bei unseren Versuchen als nichterfüllt angesehen wurde. Mit $U = 23$ m/s, $\nu = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ m²/s wird nach (8,1)

$$x_u = 0{,}21 \text{ m} \approx 0{,}8\,c. \tag{8,2}$$

Bei unserer Anordnung wurde x_u nur längs der geraden Kanalwand abgetragen; die kurze Einlaufdüse blieb unberücksichtigt. In Abb. 9 ist zur Berechnung des Ablösungspunktes ein

[1] *M. Hansen*, Z. angew. Math. Mech. 8 (1928), S. 185.
[2] Der Buchstabe u als Index bedeutet Umschlagpunkt laminar-turbulent.

neues Koordinatensystem gewählt worden, dessen Nullpunkt an der Stelle liegt, die bei unserem Vergleich der Vorderkante der Platte entsprechen soll. Die Koordinaten werden wieder mit x, y bezeichnet. Mit diesen Festlegungen liegt dann der Umschlagpunkt zwei Durchmesser vor der äußeren Knieecke.

Wir nehmen an, daß in der Grenzschicht in y-Richtung der Druck konstant ist, und berechnen diesen aus der Geschwindigkeit U der Wandstromlinie $y = 0$ bei Potentialströmung. Diese Geschwindigkeit U entspricht bei der Platte der Geschwindigkeit außerhalb der Reibungsschicht. Es ist nach (2,15) mit

$$\left.\begin{array}{lll} 2{,}8 - x/c & \text{anstatt} & y/c, \\ U & \text{,,} & -v_y, \\ y & \text{,,} & -x, \end{array}\right\} \tag{8,3}$$

$$\frac{x}{c} = 2{,}8 - \frac{2}{\pi}\left[\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{U}{v_0} + \varepsilon^2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\varepsilon^2\frac{U}{v_0} + 2\,\varepsilon\,\operatorname{arc\,tg}\,\varepsilon\,\frac{U}{v_0}\right]. \tag{8,4}$$

Nach Ziff. 6 ist an der Stelle $x = x_u$ der Druck gegenüber dem Druck im Unendlichen um etwa 1% angestiegen. Nun ist x_u berechnet worden unter der Annahme, daß der Druck längs der Wand konstant bleibt, daß also der geringe Druckanstieg die Lage des Umschlagpunktes wenig beeinflußt. Dafür ist jedoch zumindest zu fordern, daß nicht bereits vor dem errechneten Umschlagpunkt die laminare Grenzschicht sich von der Wand ablöst. Um dies zu überprüfen, kann man nach *Prandtl*[1] folgendermaßen verfahren. Es sei angenommen, daß bis zu der betrachteten Stelle hin das Profil der laminaren Grenzschicht sich unter Wirkung des Druckanstieges so weit entwickelt hat, daß nur wenig stromabwärts eine Ablösung möglich ist. *Prandtl* stellt nun die Frage, wie die Druckverteilung beschaffen sein muß, damit eine solche Ablösung gerade vermieden wird, d. h. welchen Druckanstieg die so weit entwickelte laminare Grenzschicht zu überwinden vermag. *Prandtl* findet an Hand des *Kármán-Pohlhausen*schen Näherungsverfahrens als Kriterium, daß, solange der Parameter

$$\sigma = \frac{U\,U''}{U'^2} > 11 \tag{8,5}$$

(U', U'' Ableitungen nach x) ist, keine Ablösung stattfindet. Man erhält nach (7,4)

$$\sigma = \frac{\left[1 - \varepsilon^2\left(\frac{U}{v_0}\right)^2\right]\left[(1-\varepsilon^2)^2 - 2\,\varepsilon^4\left(\frac{U}{v_0}\right)^2\right]}{\left[1 + \varepsilon^2\left(\frac{U}{v_0}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{U}{v_0}\right)^2\right]\left[1 - \varepsilon^4\left(\frac{U}{v_0}\right)^2\right]} \tag{8,6}$$

und numerisch für drei Werte von $\frac{U}{v_0}$ die Werte der Tabelle

$\frac{U}{v_0}$	0,99	0,98	0,95
$\frac{x}{c}$	0,747	0,97	1,275
σ	22,9	11,45	4,61

Demnach ist vor dem errechneten Umschlagspunkt von der laminaren in die turbulente Grenzschicht ($x = x_u = 0{,}8\,c$) keine Ablösung der laminaren Grenzschicht zu erwarten.

Zur Bestimmung des Ablösungspunktes der turbulenten Grenzschicht nimmt nun *Gruschwitz* an, daß sich die Form des Geschwindigkeitsprofils der Grenzschicht durch einen einzigen Parameter kennzeichnen läßt, und bestimmt aus Versuchen den Wert des „Formparameters", für den Ablösung eintritt. Ist u die Geschwindigkeit in der Grenzschicht, so bezeichnet, wenn h eine Stelle außerhalb der Grenzschicht bedeutet,

$$\vartheta = \frac{1}{U^2}\int_{y=0}^{h} u\,(U-u)\,dy \tag{8,7}$$

[1] *L. Prandtl* in *W. Durand*, Aerodynamic Theory III, S. 112, Berlin 1935.

die „Impulsverlustdicke". *Gruschwitz* definiert unter Berücksichtigung seines Versuchsmaterials einen Formparameter

$$\eta = 1 - \frac{u^2(\vartheta)}{U^2} \tag{8,8}$$

und findet, daß Ablösung eintritt für

$$\eta = 0{,}8 \rightarrow \text{Ablösung}. \tag{8,9}$$

Um den Verlauf von η längs x zu bestimmen, stellt *Gruschwitz* aus Dimensionsbetrachtungen eine Differentialgleichung auf:

$$\vartheta \frac{d(U^2\eta)}{dx} + A(U^2\eta) = B\,U^2. \tag{8,10}$$

A, B sind Konstanten, die aus Versuchen ermittelt wurden. In der am weitesten vereinfachten Form des Verfahrens erhält man den Verlauf der Impulsverlustdicke nach *E. Truckenbrodt*[1] aus

$$\vartheta\left(\frac{U\vartheta}{\nu}\right)^{1/4} = \frac{0{,}0160}{U^4}\left|\int_{x=x_u}^{x} U^4\,dx + C\right|. \tag{8,11}$$

Ausgangspunkt zur Ableitung dieser Gleichung ist der Impulssatz der Grenzschicht. C bestimmt sich aus dem Wert der Impulsverlustdicke am Umschlagspunkt x_u, wenn man annimmt, daß

$$\vartheta_{u_{turbulent}} = \vartheta_{u_{laminar}} \tag{8,12}$$

ist. Für die längsangeströmte Platte hat man, wenn man den Druckanstieg wieder vernachlässigt,

$$\vartheta_u = 0{,}664\sqrt{\frac{\nu\,x_u}{U}}. \tag{8,13}$$

Damit läßt sich der Verlauf von ϑ bestimmen und nach (8,10) dann auch der von η. Als Anfangswert am Umschlagspunkt kann man

$$\eta_u = 1 \tag{8,14}$$

setzen[2]. Für die Konstanten der Gleichung (8,10) gibt *Gruschwitz* an

$$A = 0{,}00894, \quad B = 0{,}00461, \tag{8,15}$$

für die *Reynolds*schen Zahlen

$$Re_\vartheta = \frac{U\vartheta}{\nu} = 6 \cdot 10^2 \cdots 5 \cdot 10^3. \tag{8,16}$$

Wie sich später zeigt, liegen unsere Messungen etwa in demselben Bereich der *Reynolds*schen Zahlen.

Die numerische Rechnung ergibt zunächst

$$\vartheta_u = 0{,}664\sqrt{\frac{1{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}21}{23}} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}.$$

Weiterhin hat man an der Umschlagsstelle

$$\left(\frac{U}{v_0}\right)_u = 0{,}9876, \qquad U_u = 0{,}9876 \cdot 23 = 22{,}7\ \text{m/s}.$$

Damit wird nach Gleichung (8,11)

$$C = 18350\ \frac{\text{m}^5}{\text{s}^4}.$$

Nach Gleichung (8,4) ist

$$dx = -\frac{2\,\varepsilon}{\pi v_0}\,\frac{(1+\varepsilon^2)^2\left[1-\left(\varepsilon\frac{U}{v_0}\right)^2\right]}{\left[1-\left(\frac{U}{v_0}\right)^2\right]\left[1-\left(\varepsilon^2\frac{U}{v_0}\right)^2\right]\left[1+\left(\varepsilon\frac{U}{v_0}\right)^2\right]}\,dU. \tag{8,17}$$

[1] *E. Truckenbrodt* in *H. Schlichting*, Grenzschichttheorie, S. 430, Karlsruhe 1952.
[2] *H. Schlichting*, a. a. O., S. 430.

Damit wird

$$\int_{x_u}^{x} U^4\,dx = -\frac{2\,c}{\pi}\left(\frac{v_0}{\varepsilon}\right)^4\left[\varepsilon^4\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{U}{v_0}+\frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\varepsilon^2\frac{U}{v_0}+2\,\varepsilon\,\operatorname{arc\,tg}\,\varepsilon\frac{U}{v_0}-(1+\varepsilon^2)^2\frac{U}{v_0}-0{,}1\right].$$

Wenn man dies in (8,11) einsetzt erhält man ϑ und anschließend durch graphische Lösung der Gleichung (8,10) $\eta = 0{,}8$ (Ablösung) für $U = 16{,}4$ m/s, $U/v_0 = 0{,}713$, x/c (Ablösung) $= 1{,}966$ bzw. der Abstand von der äußeren Ecke $0{,}834\,c$. Dieser Wert ist in Abb. 5 eingetragen.

Zur Kontrolle der Gültigkeit der Konstanten A, B, nach Gleichung (8,15), (8,16) hat man etwa

an der Umschlagstelle $x = 0$ $\quad U = 22{,}7$ m/s $\quad \vartheta_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ m,

etwa 1 Durchmesser vor äußerer Ecke $x/c = 1{,}795$ $\quad U = 18{,}4$ m/s $\quad \vartheta_2 = 15{,}7 \cdot 10^{-4}$ m.

Damit wird

$$Re_{\vartheta_1} = 379, \qquad Re_{\vartheta_2} = 1925.$$

Die Messungen von *Gruschwitz* liegen nach (7,16) im Bereich von $Re_\vartheta = 600 - 5000$. Daher scheint die Anwendung der Konstanten nach Gleichung (8,15) gerechtfertigt.

9. Zusammenfassung. Die Untersuchungen zeigen, daß es unter gewissen Voraussetzungen möglich ist, die komplizierten Vorgänge bei der Strömung in einem Knie wenigstens in der Umgebung der Umlenkung mit guter Näherung durch eine ebene Potentialströmung zu beschreiben, nämlich wenn vor der Umlenkung die Geschwindigkeit über den Querschnitt nahezu konstant ist (z. B. infolge einer kurzen Zulaufstrecke, in der sich keine dicke Grenzschicht bilden kann), so daß Sekundärströmungen weitgehend vermieden werden. Insbesondere existiert trotz der heftigen Bewegung im „Totwasser" zwischen diesem und der gesunden Strömung ein schmales Übergangsgebiet, das sich in erster Näherung als Diskontinuitätsfläche auffassen läßt. Die Bestimmung des Ablösungspunktes vor der äußeren Knie-Ecke nach *Gruschwitz* führt trotz der gemachten starken Vereinfachungen zu guter Übereinstimmung mit dem Versuch. Der Einfluß des Eckwirbels scheint sich auf einen engeren Bereich in der Umgebung der äußeren Knie-Ecke zu beschränken.

(Eingegangen am 4. November 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *D. Haase*, Berlin-Lichtenrade, Lichtenrader Damm 19.

Berichtigung

zu meiner Note im Bd. XXI, S. 33 des Ingenieur-Archivs: „Koeffizientenbedingungen zur Kontrolle des Dämpfungsgrades bei Ausgleichsvorgängen (verallgemeinerte Hurwitzbedingungen)".

Von **O. Schmutz.**

In einer brieflichen Mitteilung machte mich Herr *H. Bilharz* darauf aufmerksam, daß meine a. a. O. in Abschnitt **10** (Anfang) und Abschnitt **11** (Ende) ausgesprochene Vermutung nicht zutreffe, indem er nachwies, daß für das n-reihige Determinantenschema [Formel (21)] die Anzahl der notwendigen Rechenoperationen für den allgemeinen Fall die Größenordnung n^3 hat, während für das $2n$-reihige Schema [Formel (35)] die Größenordnung n^2 beträgt. Das eigentliche Ergebnis meiner Arbeit, die explizite Kontrolle des Dämpfungsgrades an Hand von Koeffizientenbedingungen, also ohne Wurzelbestimmung, bei der die Kriterien (21) und (35) vom theoretischen Standpunkt aus gleichberechtigt sind, wird hiervon nicht berührt.

(Eingegangen am 28. Mai 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *O. Schmutz*, Karlsruhe, Kaiserstr. 12. Elektrotechnisches Institut der Technischen Hochschule.

Berichtigung

zu meinen Aufsätzen im Bd. XX, S. 189 und im Bd. XXI, S. 396 des Ingenieur-Archivs: „Über Hauptschwingungen mit endlichen Schwingweiten".

Von Th. Pöschl.

Ein befreundeter Kollege machte mich vor kurzem in dankenswerter Weise darauf aufmerksam, daß die Steigung der „Grenzkurve", die ich in meiner I. Mitteilung durch die Gleichungen (24) bzw. (25) erhalten habe, identisch sei mit der Steigung der Bahnkurve im Umkehrpunkt, was im Allgemeinen nicht zu erwarten sei und speziell beim Doppelpendel nicht zutreffe. Die anscheinend gute Übereinstimmung, die sich bei den von mir angestellten Versuchen gemäß Abb. 4, 5 und 6 mit der Rechnung ergeben hat, war der Grund für meine Annahme, daß die Lösung der Differentialgleichung (25) auch die Grenzlagen geben müsse — ein Schluß, dessen Unrichtigkeit ich der Wahrheit gemäß richtig stellen möchte.

In allen Fällen, die auf einen ähnlichen Sachverhalt führen, dürfte es zweckmäßig sein, zwischen einer Grenzlagenkurve und einer Grenzsteigungskurve zu unterscheiden; diese fallen nur beim linearisierten Problem zusammen, sind aber sonst voneinander verschieden. Die Lösung der Differentialgleichung (25) meiner I. Mitteilung gibt tatsächlich nur ein Feld für die Grenzsteigungskurve, in das die eigentliche Grenzlagenkurve eingebettet ist. Nähere Ausführungen sollen in einer III. Mitteilung gegeben werden.

(Eingegangen am 19. Juni 1954.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Theodor Pöschl*, Karlsruhe i. B., Wendtstraße 5.

Taschenbuch der Längenmeßtechnik für Konstruktion, Werkstatt, Meßraum und Kontrolle.

In Gemeinschaft mit Dr. phil. G. Berndt, Professor an der Techn. Hochschule Dresden, und Dr.-Ing. O. Kienzle, Professor an der Techn. Hochschule Hannover herausgegeben von Dr.-Ing. **Paul Leinweber**, Berlin. Mit 790 Abbildungen und 39 Zahlentafeln im Anhang. XXIII, 806 Seiten 8°. 1954.

Ganzleinen DM 27,—

Inhaltsübersicht: **1. Grundlagen:** Begriffe. Einheiten. Mathematik. Geometrische und physikalische Grundlagen. Aus der Physiologie des Messens. Austauschbau. — **2. Maße und Meßgeräte für allgemeine Zwecke:** Lineale. Platten. Maße. Mechanische Meßgeräte. Optische Meßgeräte. Elektrische Längenmeßgeräte. Pneumatische Meßgeräte. Komparatoren und Meßmaschinen. Geräte für Oberflächenprüfung und -messung. — **3. Lehren und Meßzeuge:** Gestaltung von Lehren. Fertigung von Meßzeugen. — **4. Behandlung, Pflege und Maßüberwachung von Meßmitteln:** Behandlung und Pflege. Eingangsprüfung. Laufende Überwachung von Meßmitteln. Meßmittelbefund und Auswertung. Wirtschaftliche Überwachung. — **5. Einfache Meßaufgaben:** Ebene Flächen und ihre Abstände. Einfach gekrümmte Flächen. Winkel und Kegel. Räumliche Lage. — **6. Zusammengesetzte Meßausgaben:** Formen, profilierte Körper. Gewinde. Zahnräder. Wälzlager. Keilwelle. Kerbverzahnung. — **7. Sonderarbeitsgebiete:** Messen während des Arbeitsganges. Messen an großen Stückzahlen. Messen an Werkzeugmaschinen. Messen in der Feinwerktechnik. Messungen an optischen Teilen. — **8. Organisation des Meßwesens:** Allgemeine organisatorische Maßnahmen. Auswahl geeigneter Meßpersonen. Feinmeßraum. Anwendung der mathematischen Statistik. Wirtschaftlichkeit. — **9. Tafeln.** — **Sachverzeichnis.**

Dieses Taschenbuch faßt die gesamte Technik der Längen- und Winkelmessungen in gedrängter Form nach dem heutigen Stande zusammen. Es weist Wege zu meßgerechter Konstruktion und rationeller Kontrolle der gefertigten Teile. Es gibt Winke und Ratschläge in einfachen und schwierigen Fragen des Austauschbaues, zeigt Lösungsmöglichkeiten für Meßaufgaben an Zylindern, Kegeln, Ebenen, Gewinden, Zahnrädern, beschreibt alle neuzeitlichen Meßgeräte und deren Eigenschaften und gibt Hinweise für die zweckmäßige Organisation des Kontrollwesens. Zahlreiche Normen, Zahlentafeln und Übersichten machen dies neue Werk zu einem unentbehrlichen Nachschlagebuch für jeden, der sich mit Werkstattmeßtechnik zu befassen hat.

Richtig messen, Ausschuß vermeiden sind Wege zu Qualitätsarbeit, wirtschaftlicher Fertigung und Konkurrenzfähigkeit auf dem Weltmarkt. Wie man das erreicht, zeigen hier die besten Fachleute Deutschlands.

Verbindungselemente der Feinwerktechnik.

Von Obering. **H. Pöschl**, Karlsruhe. Mit 741 Abbildungen. (Konstruktionsbücher. Hrsg. von K. Kollmann, Band 14.) V, 108 Seiten Gr.-8°. 1954. DM 13,50

Inhaltsübersicht: Vorwort. Allgemeines. Einleitung. Einteilung und Benennung. Über die Wahl der Verbindung. Korrosion durch Elementbildung. Schraubverbindungen: Gestaltung der Schraube und des Muttergewindes. Gestaltung der Verschraubung. Sicherung von Schraubverbindungen. — Nietverbindungen: Gestaltung der Nietverbindung. — Verlappungen. Einspreizungen. Verpressungen. Blechsteppen. Falzverbindungen. Klemmverbindungen. Renkverbindungen. Einbettungen. Schweißverbindungen: Allgemeines. Elektrisches Widerstandsschweißen. Schmelzschweißen. Sonderverfahren. Schweißen von Aluminium und Aluminiumlegierungen. Schweißen von thermoplastischen Kunststoffen. — Lötverbindungen: Allgemeines. Weichlötverbindungen. Hartlötverbindungen.

Fertigungs- und stoffgerechtes Gestalten in der Feinwerktechnik.

Von Baudirektor Dr.-Ing. **Karl-Heinz Sieker**, VDI, Direktor der Ingenieurschule Gauss, Berlin, unter Mitarbeit von Baurat **Kurt Rabe**, Dozent an der Ingenieurschule Gauss, Berlin. Mit 493 Abbildungen. (Konstruktionsbücher. Hrsg. von K. Kollmann, Band 13.) V, 166 Seiten Gr.-8°. 1954.

DM 21,—; Ganzleinen DM 24,—

Inhaltsübersicht: Einleitung. Merkmale der Feinwerktechnik. Ein- und Mehrteilgestaltung. — I. Metallische Bauteile. Durch Zerspanen geformte Bauteile: Allgemeines. Drehteile. Bohrteile. Frästeile. Räumteile. Schleifteile. — Gestanzte Bauteile: Überblick über die Verfahren. Werkstoffe. Formungsgerechtes Gestalten. Festigkeitsbedingtes Gestalten. Fügegerechtes Gestalten. — Gegossene Bauteile: Sand- und Kokillenguß. Verfahren. Werkstoffe. Gießgerechtes Gestalten. Festigkeitsbedingtes Gestalten. Bearbeitungsgerechtes Gestalten. Fügegerechtes Gestalten. Druckguß. Verfahren. Werkstoffe. Gießgerechtes Gestalten. Festigkeitsbedingtes Gestalten. Fügegerechtes Gestalten. — Pulvermetallische Bauteile: Verfahren. Werkstoffe. Preßgerechtes Gestalten. — II. Nichtmetallische Bauteile. Bauteile aus Schichtpreßstoff: Verfahren. Werkstoffe. Bearbeitungsgerechtes Gestalten. Fügegerechtes Gestalten. — Bauteile aus Formpreßstoff: Verfahren. Werkstoffe. Preßgerechtes Gestalten. Festigkeitsbedingtes Gestalten. Fügegerechtes Gestalten. — Keramische Bauteile: Verfahren. Werkstoffe. Formungsgerechtes Gestalten. Fügegerechtes Gestalten. — Schluß: Konstruktionsbeispiele. Namen- und Sachverzeichnis.

Schweißkonstruktionen.

Berechnung und Gestaltung. Von Dipl.-Ing. **Richard Hänchen**. Mit 349 Abbildungen. (Konstruktionsbücher. Hrsg. von K. Kollmann, Band 12.) IV, 80 Seiten Gr.-8°. 1953. DM 9,—

Inhaltsübersicht: 1. Schweißverfahren. — 2. Die Baustähle, ihre Festigkeit, Schweißbarkeit und ihre Anlieferungsformen. — 3. Die Schweißnähte, ihre Nennspannungen und Festigkeitswerte. — 4. Berechnung der Schweißverbindungen. — 5. Gestaltung der geschweißten Bauteile. — 6. Vorbereitung zum Schweißen. — 7. Ausführungsbeispiele aus dem allgemeinen Maschinenbau. — Schrifttumverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen.

Von Dr. **Friedrich Lösch**, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. VIII, 335 Seiten 4°. 1954. Ganzleinen DM 49,80

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Neunstellige Werte der elementaren transzendenten Funktionen für $x = 0\,(0{,}0001)\,0{,}1$. — Siebenstellige Werte der elementaren transzendenten Funktionen für $x = 0{,}1\,(0{,}0005)\,3{,}15$, $x = 3\,(0{,}01)\,10$; $x = 10\,(0{,}1)\,20$; Werte von $\operatorname{tg} x$ für $x \approx \frac{\pi}{2}$; Werte von $\operatorname{Ar\,Tg} x$ und $\operatorname{Ar\,Ctg} x$ für $x \approx 1$. — Siebenstellige Werte elementarer Funktionen für $x = 0\,(1)\,100$. — Zwölfstellige Werte von $\frac{\pi}{2}\,n$ für $n = 0\,(1)\,100$. — Siebenstellige Werte der Funktionen $\sin \frac{\pi}{2} x$, $\cos \frac{\pi}{2} x$ für $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}5$. — Siebenstellige Werte der Funktionen $e^{\frac{\pi}{2} x}$, $e^{-\frac{\pi}{2} x}$, $\operatorname{Sin} \frac{\pi}{2} x$, $\operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} x$ für $x = 0\,(0{,}01)\,2$. — Siebenstellige Werte der Funktionen $e^{\frac{\pi x}{180}}$, $e^{-\frac{\pi x}{180}}$, $\operatorname{Sin} \frac{\pi x}{180}$, $\operatorname{Cof} \frac{\pi x}{180}$ für $x = 0\,(1)\,180$. — Umwandlung von Bogenmaß (x) in Gradmaß (φ). — Umwandlung von Gradmaß (φ) in Bogenmaß (x). — Einige oft gebrauchte Zahlenwerte.

In den letzten zwei Jahrzehnten sind, vor allem im Rahmen des „Applied Mathematics Programm of the National Bureau of Standards", ausführliche Tafeln für fast alle elementaren transzendenten Funktionen erschienen. Es fehlt jedoch, seit die von K. Hayashi im Jahre 1926 herausgegebenen Tafeln vergriffen sind, ein zusammenfassendes mehrstelliges Werk über diese Funktionen. Die vorliegenden Tafeln sollen zur Ausfüllung dieser Lücke beitragen. Entsprechend der Zielsetzung schließen sie sich in ihrer Grundanlage notwendig an die genannten Hayashischen Tafeln an. Das Bestreben, ein für viele Rechnungen ausreichendes, nicht zu umfangreiches und dabei bequem benutzbares Tafelwerk zu geben, führte jedoch im einzelnen zu wesentlichen Abweichungen. Einerseits wurde die Stellenzahl der Tafelwerte fast durchweg auf 7 Dezimalen beschränkt. Andererseits wurde der Tafelschritt so weit verkleinert, daß bei einem zulässigen Fehler von 1 bis 2 Einheiten der letzten Stelle im Hauptintervall fast durchweg lineare Interpolation möglich ist. Zur Erleichterung der Interpolation wurden die ersten Differenzen beigegeben.

Ein großer Teil der Tafeln ist vollständig neu berechnet worden. Bei dem restlichen Teil wurde von den vorhandenen Quellen ausgegangen und soweit nötig eine Ergänzung der damit gegebenen Werte durch Interpolation vorgenommen. In jedem Falle wurden die auf 9 bis 10 Dezimalen ermittelten Funktionswerte durch Differenzbildung kontrolliert. Die Abrundung auf 7 bzw. 9 Dezimalen wurde in der üblichen Weise vorgenommen. In Zweifelsfällen wurde die letzte Dezimale durch direkte Berechnung des betreffenden Wertes auf die erforderliche Stellenzahl ermittelt.

Praktische Funktionenlehre.

Von Professor Dr.-Ing. **Friedrich Tölke**, Karlsruhe.

Erster Band: **Elementare und elementare transzendente Funktionen.** Zweite, stark erweiterte Auflage. Mit 178 Abbildungen und 50 durchgerechneten Beispielen und einer Ausschlagtafel. XI, 440 Seiten 4°. 1950. Ganzleinen DM 39,—

Inhaltsübersicht: Erster Abschnitt: Definierende Differential- und Integralgleichungen, Fundamentaleigenschaften und gegenseitige Beziehungen der elementaren und elementaren transzendenten Funktionen. — Zweiter Abschnitt: Durch elementare und elementare transzendente Funktionen ausdrückbare Integrale. — Dritter Abschnitt: Funktionentafeln der elementaren Transzendenten. — Vierter Abschnitt: Anwendungen im Bereich der partiellen Differential- und Integralgleichungen. — Fünfter Abschnitt: Summierung von Reihenentwicklungen. — Sechster Abschnitt: Tafel der zonalen Kugelfunktion sowie ihrer Ableitungen und Integrale.

Grundzüge der Ausgleichungsrechnung

nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendung in der Geodäsie. Von Dr.-Ing. **Walter Großmann**, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 54 Abbildungen. VIII, 261 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 19,80

Inhaltsübersicht: Überblick über die Methode der kleinsten Quadrate. — I. **Grundzüge der Fehlerlehre:** Fehlerarten und Genauigkeitsmaße. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz. Berechnung des mittleren Fehlers aus scheinbaren Fehlern gleich genauer Beobachtungen. Berechnung des mittleren Fehlers aus Beobachtungen verschiedener Genauigkeit. Berechnung des mittleren Fehlers aus Doppelmessungen. Das Gaußsche Fehlergesetz und die Genauigkeitsmaße. — II. **Ausgleichung von direkten Beobachtungen:** Grundprinzip und Formen der Ausgleichungsaufgabe. Ausgleichung direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit (Arithmetisches Mittel). Ausgleichung direkter Beobachtungen ungleicher Genauigkeit (Allgemeines arithmetisches Mittel). Beobachtungen mit Summengleichung. — III. **Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen:** Einführung in die Methode der vermittelnden Beobachtungen. Aufstellen der Fehlergleichungen. Aufstellen und Auflösen der Normalgleichungen nebst Summenproben. ($v\,v$)-Proben, Schlußprobe und Rechenschema. Gewichtsreziproken und mittlere Fehler der Unbekannten. Mittlerer Fehler einer beobachteten Größe. Vermittelnde Beobachtungen ungleicher Genauigkeit. Gewicht einer Funktion der Unbekannten. Übersicht über die Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen. Gemeinsame Berechnung der Unbekannten und ihrer Gewichtsreziproken. Ausgleichung von Höhennetzen. Reduzierte Fehlergleichungen. Stationsausgleichungen. Trigonometrisches Einschneiden. — IV. **Die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen:** Einführung in die Methode der bedingten Beobachtungen. Aufstellen der Bedingungsgleichungen. Korrelatengleichungen, Normalgleichungen und Proben. Mittlerer Fehler einer beobachteten Größe. Bedingte Beobachtungen mit ungleichen Gewichten. Mittlerer Fehler von Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen. Übersicht über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen. Einfache Anwendungen der Ausgleichungen nach bedingten Beobachtungen. Bedingungsgleichungen in Dreiecksnetzen. Reduzierte Bedingungsgleichungen. Das Boltzsche Entwicklungsverfahren. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen. Bedingungsgleichungen mit Unbekannten. Äquivalente Fehlergleichungen. — V. **Anhang:** Ausgleichung durch schrittweise Annäherung. Genäherte Darstellung von Funktionen. Mittlere Fehler der Genauigkeitsmaße. **Schrifttum** (Auswahl). — **Namen- und Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen 3 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg bei.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. 57 275 4022 0,85 K.B./Z. 040.